A *variable* is a "quantity that may assume any one of a set of values" (Webster' dictionary).

Random variables are variables whose observed value is determined by chance.

Definition 3.1.1: Discrete random variable

A random variable is discrete if it can assume at most a finite or a countably infinite number of possible values.

Exempel 3.1.1, 3.1.2, sida 45-46

Definition 4.1.1: Continuous random variable

A random variable is continuous if it can assume any value in some interval or intervals of real numbers and the probability that it assumes any specific value is 0.

Exempel 3.1.3, sida 46

Definition 3.2.1: Discrete density

Let X be a discrete random variable. The function f given by

$$f(x) = P[X = x]$$

for x real is called the density function for X.

Notera att

$$P[X \in A] = \sum_{x \in A} f(x)$$

(summationen är över alla $x \in A$, sådana att $f(x) > 0$)

Exempel: Bernoullitätheten

Låt A vara en händelse i ett försök och låt $p = P[A]$. Om man bara är intresserad av huruvida A inträffar eller ej, kan man införa

$$X = \begin{cases} 1 & \text{då } A \text{ inträffar} \\ 0 & \text{då } A' \text{ inträffar} \end{cases}$$

En stokastisk variabel som endast kan antaga värdet 0 eller 1 kallas för Bernoullivariabel. Obs. att $p = P[X = 1]$ och att X:s täthet är

$$f(x) = \begin{cases} 1-p & \text{då } x = 0 \\ p & \text{då } x = 1 \\ 0 & \text{då } x \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Vi skriver $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ när vi vill tala om att X tar sina värden ur $\{0,1\}$ och att $P[X = 1] = p$, där $0 < p < 1$.

Exempel: Ett tärningskastexperiment

Nedan visas resultatet av totalt $100 = 5 \cdot 20$ tärningskast, där vi endast noterat ifall tärningen visar sexa (kodat 1) eller ej (kodat 0).

data	f	f/n
0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0	3	0.15
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0	2	0.1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0	3	0.15
0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0	6	0.3
1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0	7	0.35

Sammanlagt erhölls $f = 21$ sexor. Proportionen sexor i försöket blev alltså $f/n = 0.21$.

Ytterligare 900 kast gjordes. Totalt erhölls $f = 169$ sexor. Proportionen sexor efter 1000 kast blev alltså $f/n = 0.169$.

Definition 3.2.2: Discrete distribution function

Let X be a discrete random variable with density f. The (cumulative) distribution function for X, denoted by F, is defined by

$$F(x) = \sum_{y \le x} f(y)$$

for x real.

Notera att

$$F(x) = P[X \le x]$$

samt att

$$f(x) = F(x) - F(x-)$$

där

$$F(x-) = \sum_{y < x} f(y) = P[X < x]$$

Några diskreta tätheter

Vi säger att X är Bernoullifördelad om X är diskret och har tätheten

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1-p & \text{då } x=0 \\ p & \text{då } x=1 \end{array} \right\} = p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{för} \quad x=0,1$$

Vi skriver detta $X \sim \mathrm{Ber}(p)$. Obs att $0 < p < 1$.

Vi säger att X är *geometriskt* fördelad om X har tätheten

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p \quad \text{för} \quad x = 1, 2, \ldots$$

för något p uppfyllande $0 < p < 1$. Vi skriver $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Se exempel 3.4.1, sida 60-61

Vi säger att X är *binomialfördelad* med parametrar n och p, om X har tätheten

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \quad \text{för} \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

Här är n ett positivt heltal och $0 < p < 1$. Vi skriver $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Se exempel 3.5.1, sida 67-68

Vi säger att X är *Poissonfördelad* med parameter $\lambda > 0$ om X har tätheten

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{för} \quad x = 0, 1, \ldots$$

Vi skriver $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

Se exempel 3.8.1, sida 77-78

Exempel: Poisson-observationer

Låt $X \sim \mathrm{Poi}(2.5)$.

Nedan visas resultatet av $n = 100$ oberoende observationer av X

x	f_x	f_x/n	$p(x)$
0	9	0.090	0.082
1	16	0.160	0.205
2	28	0.280	0.257
3	22	0.220	0.214
4	15	0.150	0.134
5	5	0.050	0.067
6	2	0.020	0.028
7	2	0.020	0.010
8	1	0.010	0.003

Nedan visas resultatet av $n = 1000$ oberoende observationer av X

x	f_x	f_x/n	$p(x)$
0	80	0.080	0.0821
1	212	0.212	0.2052
2	226	0.226	0.2565
3	229	0.229	0.2138
4	137	0.137	0.1336
5	73	0.073	0.0668
6	27	0.027	0.0278
7	9	0.009	0.0099
8	5	0.005	0.0031
9	2	0.002	0.0009

Definition 4.1.2: Continuous density

Let X be a continuous random variable. A function f such that

1. $f(x) \geq 0$ for x real
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$

is called a density for X.

Definition 4.1.3: Continuous distribution function

Let X be a continuous random variable with density f. The distribution function for X, denoted by F, is defined by

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

Notera att

$$F(x) = P[X \leq x] = P[X < x]$$

samt att

$$f(x) = F'(x)$$

Exempel 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 på sidorna 100–104

Några kontinuerliga tätheter

Vi säger att X är likformigt fördelad på (a, b) om X är kontinuerlig och har tätheten

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{för} \quad a < x < b$$

Detta skrives $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

Vi säger att X är exponentialfördelad med parameter λ om tätheten är

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad \text{för} \quad x > 0$$

Vi skriver detta $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(Observera att Milton & Arnold definierar exponentialfördelningen med hjälp av parametern $\beta = 1/\lambda$.)

Vi säger att X är normalfördelad med parametrar μ och σ om tätheten är

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{för} \quad -\infty < x < \infty$$

Vi skriver detta $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. För parametrarna gäller $-\infty < \mu < \infty$ och $\sigma > 0$.

Definition 5.1.1: Discrete joint density

Let X and Y be discrete random variables. The function f_{XY} given by

$$f_{XY}(x, y) = P[X = x, Y = y]$$

for x and y real is called the joint density for X, Y.

Notera att

$$P[X \in A, Y \in B] = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} f_{XY}(x, y)$$

Se exempel 5.1.1, sida 157

Definition 5.1.2: Discrete marginal densities

Let X and Y be discrete random variables with joint density f_{XY}. The marginal density for X, denoted by f_X, is given by

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

The marginal density for Y, denoted by f_Y, is given by

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

Ibland är det praktiskt att slarva lite med beteckningarna och om $f(x, y)$ betecknar den två-dimensionella tätheten, beteckna de endimensionella marginalerna med $f(x)$ resp. $f(y)$. Då

$$f(x) = \sum_y f(x, y) \quad \text{och} \quad f(y) = \sum_x f(x, y)$$

Se exempel 5.1.2, sida 158

Definition 5.1.3: Continuous joint density

Let X and Y be continuous random variables. A function $f(x, y)$ such that

1. $f(x, y) \geq 0$ for x, y real
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = 1$
3. $P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$

is called a joint density for X, Y.

Se exempel 5.1.3, sida 159

Definition 5.1.4: Continuous marginal densities

Let X and Y be continuous random variables with joint density $f(x, y)$ such that. The marginal densities for X and Y, denoted $f(x)$ and $f(y)$, respectively, are given by

1. $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$
2. $f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$

Ibland måste man vara väldigt tydlig och använda beteckningar, som

$$f_{XY}, f_X, f_Y$$

för den gemensamma tätheten resp de två marginalerna.

Se exempel 5.1.4, sida 161

Exempel: Likformig fördelning på $(0, 1)^2$

Vi skriver $X, Y \sim \mathrm{U}\left((0, 1)^2\right)$, om tätheten är

$$f(x, y) = 1 \quad \text{då} \quad 0 < x, y < 1$$

Exempel 5.1.3, 5.1.4: $X, Y \sim \mathrm{U}\left([8.5,\ 10.5] \times [120,\ 240]\right)$

Exempel: Bivariat normalfördelning

Vi skriver $X, Y \sim \mathrm{N}(\mu_x, \mu_y; \sigma_x, \sigma_y, \rho)$, om tätheten är

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - \rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

För parametrarna gäller att

$$-\infty < \mu_x,\ \mu_y < \infty$$

$$\sigma_x, \sigma_y > 0 \quad \text{samt} \quad -1 < \rho < 1$$

Definition 5.1.5: Independent random variables

Let X and Y be random variables with joint density f_{XY} and marginal densities f_X and f_Y, respectively. We say that X, Y are independent if and only if

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

for all x, y.

Analogt, $X_1, \ldots, X_n$ sägs vara *oberoende* då

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Se exempel 5.1.6, sida 164

Exempel: Bivariat normalfördelning

Låt $X, Y \sim \mathrm{N}(\mu_x, \mu_y; \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Då är X, Y oberoende om och endast om $\rho = 0$.

Definition 5.4.1: Conditional density

Let X and Y be random variables with joint density f_{XY} and marginal densities f_X and f_Y, respectively. The conditional density for X given $Y = y$, denoted $f_{X|y}$ or $f_{X|Y=y}$, is given by

$$f_{X|y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

The conditional density for Y given $X = x$, denoted $f_{Y|x}$ or $f_{Y|X=x}$, is given by

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

Slarviga men praktiska beteckningar:

$$f(x,y), f(x), f(y)$$

(som tidigare) samt de betingade tätheterna

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \quad \text{och} \quad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

Observera att

$$\begin{aligned} X, Y \ \text{ är oberoende } \ &\Leftrightarrow \ f(x,y) = f(x)f(y) \\ &\Leftrightarrow \ f(y|x) = f(y) \\ &\Leftrightarrow \ f(x|y) = f(x) \end{aligned}$$

Exempel 5.4.2, sida 173

Bra att veta om bivariata normalfördelningen

Låt $X, Y \sim \mathrm{N}(\mu_x, \mu_y; \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Då

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

Medelst integration fås

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

D.v.s. $X \sim \mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x)$.

Detta ger

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left(y - \left(\mu_y + \rho\sigma_y\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right)^2}$$

Vi ser att

$$Y|X = x \sim \mathrm{N}\left(\mu_y + \rho\sigma_y\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}, \sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

Analogt inses att $Y \sim \mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y)$, samt

$$X|Y = y \sim \mathrm{N}\left(\mu_x + \rho\sigma_x\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}, \sigma_x\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

Definition 3.3.1, 4.2.1, 5.2.1: Expected value

Let X be a discrete random variable with density f. Then $H(X)$ is a random variable. The expected value of $H(X)$ exists and is given by

$$E[H(X)] = \sum_x H(x)f(x)$$

provided $\sum_x |H(x)|f(x) < \infty$.

Let X be a continuous random variable with density f. The expected value of $H(X)$ exists and is given by

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)\,dx$$

provided $\int_{-\infty}^{\infty} |H(x)|f(x)\,dx < \infty$.

Let X, Y be random variables with joint density f_{XY}. The expected value of $H(X,Y)$ exists and is given by

$$E[H(X,Y)] = \sum_x \sum_y H(x,y) f_{XY}(x,y)$$

for X, Y discrete, or

$$E[H(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y) f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

for X, Y continuous, provided the sum (integral) is absolutely convergent.

Var och en bör nu förstå t.ex hur man beräknar $E[W]$ om $W = H(X,Y,Z)$ med hjälp av trippeln X, Y, Z:s täthet $f(x,y,z)$.

Notera att

$$E[X] = \sum_x x f(x) \quad \text{eller} \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

om väntevärdet existerar och tätheten är $f(x)$ Men vi kan också beräkna väntevärdet så här

$$E[X] = \sum_x \sum_y x f(x,y) \quad \text{eller} \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dy\,dx$$

om man har givet en två-dimensionell gemensam täthet $f(x,y)$.

Exempel 3.3.1, 4.2.1, 5.2.1, 5.2.2.

Ofta använder man beteckningen μ (eller μ_X) istället för $E[X]$

Theorem 3.3.1: Rules for expectation

Let X and Y be random variables and let c be any real number. Then

1. $E[c] = c$
2. $E[cX] = cE[X]$
3. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Exempel 3.3.2.

Theorem 5.2.2

Let X and Y be independent random variables. Then

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Exempel 5.2.2.

Definition 3.3.2: Variance

Let X be a random variable with mean $\mu = E[X]$. The variance of X, denoted by $\mathrm{Var}[X]$ or σ^2, is given by

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X-\mu)^2]$$

Notera att $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$ (sats 3.3.2)

Exempel 4.2.1, 5.3.1

Definition 3.3.2: Standard deviation

Let X be a random variable with variance σ^2. The standard deviation of X, denoted by σ, is given by

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Theorem 3.3.3: Rules for variance

Let X and Y be a random variables and let c be any real number. Then

1. $\mathrm{Var}[c] = 0$
2. $\mathrm{Var}[cX] = c^2\mathrm{Var}[X]$
3. $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ if X and Y are independent

Definition 3.4.2: Ordinary moments

Let X be a random variable. The kth (ordinary) moment for X is defined as $E\left[X^k\right]$.

Definition 3.4.3: Moment generating function

Let X be a random variable. The moment generating function for X (m.g.f.) is denoted by $m_X(t)$ and is given by

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

provided this expectation exists for all real numbers t in som open interval $(-h,\, h)$.

Theorem 3.4.2

Let $m_X(t)$ be a moment generating function for a random variable X. Then

$$\left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = m_X^{(k)}(0) = E\left[X^k\right]$$

Låt $Y = X_1 + \ldots + X_n$, där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende, likafördelade och har m.g.f $m_X(t)$. Då är funktionen

$$m_Y(t) = (m_X(t))^n$$

Y:s m.g.f (j.f.r den något generellare sats 7.3.2).

Låt X ha m.g.f $m_X(t)$ och sätt $Y = \alpha + \beta X$. Då är funktionen

$$m_Y(t) = e^{\alpha t} m_X(\beta t)$$

Y:s m.g.f (j.f.r sats 7.3.3).

Låt $X \sim \mathrm{Ber}(p)$. Då

$$E[X] = p$$

och

$$\mathrm{Var}[X] = p(1-p)$$

Notera också att

$$m_X(t) = q + pe^t$$

där $q = 1 - p$.

Theorem 3.4.1

M.g.f för Geo(p) är

$$m(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t} \quad \text{för} \quad t < -\ln q$$

där $q = 1 - p$.

Visa nu själv att

$$m'(0) = \frac{1}{p} \quad \text{och} \quad m''(0) = \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2}$$

vilket medför att

$$\mu = \frac{1}{p} \quad \text{och} \quad \sigma^2 = m''(0) - m'(0)^2 = \frac{q}{p^2}$$

Theorem 3.4.3

För Geo(p) gäller

1. $\mu = 1/p$
2. $\sigma^2 = q/p^2$ där $q = 1 - p$

Theorem 3.5.1

M.g.f för Bin(n, p) är

$$m(t) = (q + pe^t)^n \quad \text{för} \quad -\infty < t < \infty$$

där $q = 1 - p$. Vidare

1. $\mu = np$
2. $\sigma^2 = np(1-p)$

Theorem 3.8.1

M.g.f för Poi(λ) är

$$m(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad \text{för} \quad -\infty < t < \infty$$

där $q = 1 - p$. Vidare

1. $\mu = \lambda$
2. $\sigma^2 = \lambda$

ty $m'(0) = \lambda$ och $m''(0) = \lambda + \lambda^2$.

Notera att

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx e^{-np} \frac{(np)^x}{x!}$$

om n är stort och p är litet.

Vi har alltså att

$$\text{Bin}(n, p) \approx \text{Poi}(\lambda)$$

där $\lambda = np$ är litet

Läs själv om Poissonprocessen på sida 76–77.

Steps in solving a Poisson problem:

1. Determine the basic unit of measurements used.
2. Determine the average number of occurences of the event per unit. This number is denoted by λ.
3. Determine the length or size of the observation period. This number is denoted by s.
4. The random variable X, the number of occurences of the event in a unit of size s, follows a Poisson distribution with parameter $k = \lambda s$.

Vi säger att X är likformigt fördelad på (a, b) om X är kontinuerlig och har tätheten

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{för} \quad a < x < b$$

Detta skrives $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

Observera att

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{då} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{då} \quad x > b \end{cases}$$

samt

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

och

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Standardisering:

$$U = \frac{X-a}{b-a} \sim \mathrm{U}(0, 1)$$

Vi säger att X är exponentialfördelad med parameter λ om tätheten är

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{för} \quad x > 0$$

Vi skriver detta $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Observera att boken definierar exponentialfördelningen med hjälp av parametern $\beta = 1/\lambda$.

Theorem 4.3.3: Connection to the Poisson process

Consider a Poisson process with parameter λ. Let W denote the time of occurence of the first event. Then $W \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

X:s fördelningsfunktion är

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{för} \quad x > 0$$

Notera dessutom

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{och} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Standardisering:

$$Y = \lambda X \sim \mathrm{Exp}(1)$$

Vi säger att X är normalfördelad med parametrar μ och σ om tätheten är

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{för} \quad -\infty < x < \infty$$

Vi skriver detta $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. För parametrarna gäller

$$-\infty < \mu < \infty \quad \text{och} \quad \sigma > 0$$

Theorem 4.4.1, 4.4.2

M.g.f för $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ är

$$m(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \quad \text{för} \quad -\infty < t < \infty$$

Härur följer att om $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ så gäller

$$\mu = E[X] \quad \text{och} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}[X]$$

Theorem 4.4.3: Standardization theorem

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma) \quad \Leftrightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Notera att $\mathrm{N}(0, 1)$-tätheten är

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Motsvarande fördelningsfunktion betecknas Φ:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)\, dz$$

Notera nu att

$$\begin{aligned} P[a \leq X \leq b] &= P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right] \\ &= P\left[Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right] - P\left[Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

I tabell V (sida 697–698) hittar man $\Phi(z)$ för z-värden ifrån -3.40 till och med 3.49 i steg om 0.01. Tabell över normalfördelningen hittar du även i Beta och i kursens formelsamling. I vissa tabeller är $\Phi(z)$ endast tabellerad för icke-negativa z-värden. Utnyttja då att

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Theorem 4.5.1: Normal probability rule

Låt $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Då

$$\begin{aligned} P[|X-\mu| \le \sigma] &= 0.68 \quad \leftarrow \\ P[|X-\mu| \le 1.96\sigma] &= 0.95 \\ P[|X-\mu| \le 2\sigma] &\approx 0.95 \quad \leftarrow \\ P[|X-\mu| \le 2.576\sigma] &= 0.99 \\ P[|X-\mu| \le 3\sigma] &= 0.997 \quad \leftarrow \end{aligned}$$

Theorem 4.5.2: Chebyshev's inequality

Let X be a random variable with mean μ and standard deviation σ. Then

$$P[|X-\mu| \le k\sigma] \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

T.ex

$$P[|X-\mu| \le \sigma] \ge 0$$
$$P[|X-\mu| \le 2\sigma] \ge 0.75$$
$$P[|X-\mu| \le 3\sigma] \ge 0.88$$

J.f.r med ”Normal probability rule”

Fler nyttigheter om bivariata normalfördelningen (j.f.r OH no 14)

Låt $X, Y \sim \mathrm{N}(\mu_x, \mu_y; \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Då

$$Y = \mu_y + \rho\sigma_y \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} + \sigma_y\sqrt{1-\rho^2}Z$$

där $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ och oberoende av X.

Låt $Z_1, Z_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$ och oberoende. Om

$$\begin{aligned} X &= \mu_x + \sigma_x Z_1 \\ Y &= \mu_y + \rho\sigma_y Z_1 + \sigma_y\sqrt{1-\rho^2}Z_2 \end{aligned}$$

så är $X, Y \sim \mathrm{N}(\mu_x, \mu_y; \sigma_x, \sigma_y, \rho)$.

Vi säger att en stokastisk variabel T är Weibullfördelad med parametrar $\alpha > 0$ och $\beta > 0$ om tätheten är

$$f(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} \quad \text{för} \quad t > 0$$

och vi skriver $T \sim \mathrm{Weibull}(\alpha, \beta)$.

Observera att

$$\mathrm{Weibull}(\alpha, 1) = \mathrm{Exp}(\alpha)$$

Weibull-fördelningens väntevärde och varians är

$$\mu = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1+1/\beta)$$
$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta}\Gamma(1+2/\beta) - \mu^2$$

där Γ är Eulers gammafunktion (sats 4.7.1).

Fördelningsfunktion:

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t^\beta} \quad \text{för} \quad t \ge 0$$

Standardisering:

$$S = \alpha T^\beta \sim \mathrm{Exp}(1)$$

Let T denote the time to failure of a component or a (mechanical) system of components. Then T is continuous and can assume any value in the interval $(0, \infty)$. The density f, for T, is called the *failure density*. The *reliability function*, R, is defined by

$$R(t) = 1 - F(t)$$

Thus,

$$R(t) = P[T > t] = \int_t^\infty f(t)\,dt$$

The *force of mortality* or *hazard rate*, ρ, is defined by

$$\rho(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P[t < T \le t+h | T > t]}{h} \quad \text{for} \quad t > 0$$

Theorem 4.7.2, 4.7.3

Let T be a random variable with failure density f, reliability function R and hazard rate ρ. Then

$$\rho(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

Moreover,

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \rho(s)\,ds\right)$$

Definition 4.7.2: Series system

A system whose components are arranged in such a way that the system fails whenever any of the components fail is called a series system.

Definition 4.7.3: Parallel system

A system whose components are arranged in such a way that the system fails only if all of its components fail is called a parallel system.

Definition 5.2.2: Covariance

Let X and Y be random variables with means μ_X and μ_Y respectively. The covariance between X and Y, denoted by $\mathrm{Cov}[X,Y]$ or σ_{XY}, is given by

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Theorem 5.2.1: Computational formula for covariance

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Notera att $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$ om X, Y är oberoende.

Exempel 5.2.3, 5.2.4

Notera att

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}[X,Y]$$

Definition 5.3.1: Correlation

Let X and Y be random variables with means μ_X and μ_Y and variances σ_X^2 and σ_Y^2, respectively. The correlation between X and Y, denoted ρ or ρ_{XY}, is given by

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}}$$

Exempel 5.3.1

Definition 5.4.2: Curve of regression

Let X and Y be random variables with joint density f.

1. The graph of the mean value of X given $Y=y$, denoted $\mu_{X|y}$ or $\mu_{X|Y=y}$, is called the curve of regression of X on Y.
2. The graph of the mean value of Y given $X=x$, denoted $\mu_{Y|x}$ or $\mu_{Y|X=x}$, is called the curve of regression of Y on X.

Exempel: Bivariat normalfördelning (j.f.r OH no 14, 30)

Låt $X, Y \sim \mathrm{N}(\mu_x, \mu_y; \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Då

1. $\mu_{Y|x} = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$
2. $\sigma_{Y|x} = \sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$