χ^2-fördelningen

Låt $Z_1, \ldots, Z_n$ vara oberoende N(0, 1)-variabler. Då gäller

$$Y^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$$

Vi säger att Y^2 är χ^2-fördelad med n frihetsgrader.

Kvantilen $\chi^2_{\gamma,\alpha}$ definieras av att $P\left[Y^2 > \chi^2_{\gamma,\alpha}\right] = \alpha$.

Theorem 8.1.1: Distribution of $(n-1)S^2/\sigma^2$

Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a normal distribution with mean μ and standard deviation σ. Then

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Sats 8.1.2: $100(1-\alpha)$%-konfidensintervall för σ^2

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov från en N(μ, σ)-fördelning. Då

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right] = 1-\alpha$$

samt

$$P\left[\sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right] = 1-\alpha$$

Exempel

För att undersöka precisionen hos en metod att mäta induktanser gjorde man 20 mätningar av induktansen hos en viss spole. Man erhöll stickprovsvariansen $s^2 = 3.30$.

Låt $\alpha = 0.05$. Vi förutsätter oberoende normalfördelade fel.

1) Ur tabell fås $\chi^2_{19,0.975} = 8.907$, $\chi^2_{19,0.025} = 32.852$. Således har intervallestimatet

$$\left(\frac{19 \cdot 3.30}{32.852} =\right) \quad 1.91 \leq \sigma^2 \leq 7.04 \quad \left(= \frac{19 \cdot 3.30}{8.907}\right)$$

konfidensen 95%.

2) Ur tabell fås att $\chi^2_{n-1,1-\alpha} = \chi^2_{19,0.95} = 10.117$. Således har intervallestimatet

$$\sigma^2 \leq 6.20 \quad \left(= \frac{19 \cdot 3.30}{10.117}\right)$$

konfidensen 95%.

Vill man istället intervallskatta σ gör man som ovan och drar kvadratroten ur alla led. Vi ser bl.a att $\sigma < 2.49$ $(= \sqrt{6.20})$ har konfidensen 0.95.

Students t-fördelning

Låt $Z \sim$ N(0, 1) och $Y^2 \sim \chi^2(\gamma)$ vara oberoende. Då

$$T = \frac{Z}{Y/\sqrt{\gamma}} \sim t(\gamma)$$

Vi säger att T är t-fördelad med γ frihetsgrader.

Kvantilen $t_{\gamma,\alpha}$ bestäms ur $P\left[T > t_{\gamma,\alpha}\right] = \alpha$.

Theorem 8.2.1: Distribution of $(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$

Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a normal distribution with mean μ and standard deviation σ. Then

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Sats 8.2.2: $100(1-\alpha)$%-konfidensintervall för μ

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov från en N(μ, σ)-fördelning. Då

$$P\left[\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2}\, S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2}\, S/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$

samt

$$P\left[\mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\alpha}\, S/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$

och

$$P\left[\mu \geq \bar{X} - t_{n-1,\alpha}\, S/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$

Exempel

En metallurg gjorde fyra bestämningar av mangans smältpunkt, varvid han erhöll följande smältpunkter i grader Celcius:

1269 1271 1263 1265

Punkt- och intervallskatta mangans smältpunkt. J.f.r med tabellvärdet 1269°C.

Uträkning ger $\bar{x} = 1267$, $s = 3.651$ och $n = 4$.

Medelvärdet $\bar{x} = 1267$ är en punktskattning av smältpunkten om mätmetoden är väntevärdesriktig.

Vi förutsätter att den ger normalfördelade fel. Om inget annat sägs väljes normalt konfidensgraden 95%. Av pedagogiska skäl väljer jag emellertid att räkna med konfidensgraden 99%. Då är $\alpha = 0.01$. Ur tabell fås att $t_{n-1,\alpha/2} = t_{3,0.005} = 5.841$, vilket ger

$$t_{n-1,\alpha/2}\, s/\sqrt{n} = 5.841 \cdot 3.651/\sqrt{4} = 10.7$$

Således är

$$\mu = 1267 \pm 10.7$$

eller

$$\mu \in [1256.3,\ 1277.7]$$

ett intervallestimat för mangans smältpunkt med konfidens 99%.

Notera att tabellvärdet 1269 hör till intervallet.

I jordprovsexemplet (se Chapter 7, OH no 2, 12, 14) fick vi i $n = 5$ mätningar av kromhalten medelvärdet $\bar{x} = 233.64$ och standardavvikelsen $s = 28.868$. Marken bedöms som förorenad om $\mu > 200$ och vi ska undersöka om så verkar vara fallet.

Lösning nr 1: Vi gör ett nedåt begränsat konfidensintervall och vi vill vara väldigt säkra på att konfidensgränsen verkligen är mindre än det sanna parametervärdet μ, så vi väljer konfidensen 99%. Ur tabell fås $t_{4,0.01} = 3.747$ och vi räknar ut att konfidensintervallet blir

$$\mu > \bar{x} - t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n} = 233.64 - 48.37 = 185.27$$

Vi kan alltså inte påstå att marken är förorenad om vi vill att risken att vi har fel ska vara så liten som 1%.

Väljer vi istället konfidensen 95%, så ska vi räkna med kvantilen $t_{4,0.05} = 2.132$. Vi får då

$$\mu > 233.64 - 27.52 = 206.12 \quad \Rightarrow \quad \mu > 200$$

Väljer vi nu att påstå att marken är förorenad, så är risken att vi har fel ej större än 5%.

Lösning nr 2: *Hypotesprövning*

Vår forsknings- eller *alternativhypotes* H_1 är därför $\mu > 200$.

Vår *nollhypotes* H_0 är motsatsen, d.v.s att $\mu \leq 200$

Vår uppgift är att testa $H_0 : \mu \leq 200$ mot $H_1 : \mu > 200$.

Vårt s.k *nollvärde* är $\mu_0 = 200$ och vi ska strax se att man kan räkna som om nollvärdet μ_0 vore det sanna värdet av μ.

Vi behöver en beslutsregel, d.v.s bestämma oss för när vi ska tro att alternativhypotesen $H_1 : \mu > \mu_0$ är sann. Vi säger då att vi *förkastar nollhypotesen*. Vi förstår att det då finns en risk att vi felaktigt förkastar. Denna typ av fel kallas för *typ-I-fel* (se definition 8.3.1) och vi ska gardera oss mot detta fel genom att välja en beslutsregel så att sannolikheten att vi gör ett typ-I-fel är liten, t.ex 5% eller 1%.

Den maximalt tillåtna sannolikheten att begå ett typ-I-fel kallas för testets *signifikansnivå* och betecknas α.

Rent generellt gäller att ju större $\bar{x}$ är, desto rimligare verkar påståendet att $\mu > \mu_0$. Vi väljer därför att "förkasta H_0 då $\bar{x} \geq c$." Syftet med det som följer är att bestämma c så att sannolikheten att förkasta blir mindre än α om nollhypotesen $H_0 : \mu \leq \mu_0$ är sann (α är alltså risken att vi gör ett typ-I-fel).

Låt $c = \mu_0 + t_{n-1,\alpha}\, s/\sqrt{n}$.

Under $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gäller då att

$$\begin{aligned} P[\bar{X} \geq c] &= P[\bar{X} \geq \mu_0 + t_{n-1,\alpha}\, S/\sqrt{n}] \\ &= P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 - \mu}{S/\sqrt{n}} + t_{n-1,\alpha}\right] \\ &\leq P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \geq t_{n-1,\alpha}\right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

eftersom
$$\frac{\mu_0 - \mu}{S/\sqrt{n}} \geq 0 \quad \text{och} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Notera nu att
$$\bar{x} \geq c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{n-1,\alpha}$$

Alltså

Väljer vi att förkasta H_0 (acceptera H_1) då
$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{n-1,\alpha}$$
håller testet (signifikans-) nivån α. Risken att vi gör ett felaktigt förkastande (d.v.s att vi felaktigt påstår att H_1 är sann) är då ej större än 100α%.

I vårt exempel med jordproverna (se OH no 5) får vi
$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{233.64 - 200}{28.868/\sqrt{5}} = 2.606$$

Vi jämför med $t_{4,0.05} = 2.132$ och $t_{4,0.01} = 3.747$ och ser att med signifikansnivån $\alpha = 0.05$ kan vi förkasta $H_0 : \mu \leq 200$, men att om vi hade valt att testa på den säkrare nivån $\alpha = 0.01$ så hade vi inte fått något förkastande.

M.a.o, väljer vi att påstå att marken är förorenad, så är risken att vi har fel $\leq 5\%$ och $> 1\%$. Att detta är exakt samma slutsats som vi kom fram till i den första lösningen av detta problem (se OH no 5) är ingen tillfällighet.

Vi räknar ut sannolikheten för en minst lika extrem observation som den vi fick, d.v.s.
$$P\left[\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq 2.606\right] = 0.030$$

Detta kallas för testets *observerade signifikansnivå* eller *P-värde*. Observera att P-värdet räknas ut under förutsättning att nollvärdet μ_0 är det sanna väntevärdet. Generellt gäller att om P-värdet $\leq \alpha$, så kan vi förkasta nollhypotesen på nivån α.

Antag att vi istället hade velat påvisa $\mu < \mu_0$. Då hade ett analogt resonemang lett till att man kan förkasta $H_0 : \mu \geq \mu_0$ (acceptera $H_1 : \mu < \mu_0$) på nivån α då

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_{n-1,\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu_0 - \bar{x}}{s/\sqrt{n}} \geq t_{n-1,\alpha}$$

Och om vi hade velat påvisa att $\mu \neq \mu_0$, så hade nivå-α-regeln istället blivit förkasta $H_0 : \mu = \mu_0$ då

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{n-1,\alpha/2}$$

Definition 8.3.1: Type I error and level of significance α

Consider a test of a hypothesis. A Type I error is an error that is made when the null hypothesis is rejected when, in fact, true. The maximal probability of committing a Type I error is called the level of significance of the test and is denoted by α.

Definition 8.3.2: Type II error and β

Consider a test of a hypothesis. A Type II error is an error that is made when the null hypothesis is not rejected when, in fact, false. The probability of committing a Type II error is denoted β.

Definition 8.3.3: Power

Consider a test of a hypothesis. The probability that the null hypothesis will be rejected when, if fact, false is called the power of the test and equals $1 - \beta$.

Example 8.6.1

One random variable studied while designing the front-wheel-drive half-shaft of a new model automobile is the displacement (in mm) of the constant velocity (CV) joints. With the joint angle fixed at 12^o, 20 simulations were conducted, resulting in the following data:

6.2	1.9	4.4	4.9	3.5	4.6	4.2	1.1	1.3	4.8
4.1	3.7	2.5	3.7	4.2	1.4	2.6	1.5	3.9	3.2

For these data $\bar{x} = 3.39$ and $s = 1.410$. Engineers designing the front-wheel-drive half-shaft claim that the standard deviation in the displacement of the CV shaft is less than 1.5 mm.

Do these data support the contention of the engineers?

Example 8.6.1 (lösning)

Vi ska visa att standardavvikelsen $\sigma < 1.5$ och ska därför testa

$$H_0 : \sigma \geq 1.5 \;\text{ mot }\; H_1 : \sigma < 1.5$$

Nollvärdet är $\sigma_0 = 1.5$. Vi ska förkasta H_0 då s är litet, d.v.s då $(n-1)s^2/\sigma_0^2$ är litet, ty ju mindre s är, desto troligare är H_1. Vi förutsätter att observationerna är normalfördelade.

Nivå-α-regeln blir förkasta H_0 då $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha}$.

Insättning av observerade värden ger

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 1.41^2}{1.5^2} = 16.79$$

Jämför med

$$\chi^2_{19,0.95} = 10.1, \quad \chi^2_{19,0.90} = 11.7, \quad \chi^2_{19,0.75} = 14.6, \quad \chi^2_{19,0.50} = 18.3$$

Vi kan alltså inte ens förkasta H_0 på nivån $\alpha = 0.25$.
P-värdet ligger mellan 0.25 och 0.50.

Kvantil- och "probability"-plott

Börja med att sortera data $x_1, \ldots, x_n$ i storleksordning:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

och noterar att vi medelst ett symmetriargument kan motivera ihopkopplingen av $x_{(i)}$ med sannolikheten $(i-0.5)/n$.

Låt z_i vara $(i-0.5)/n$-kvantilen i $N(0,1)$-fördelningen. Då

$$\Phi(z_i) = \frac{i-0.5}{n}$$

I en kvantil-plott plottas de s.k empiriska kvantilerna $x_{(i)}$ mot de teoretiska, vilket i normalfördelningsfallet är $z_1, \ldots, z_n$.

I en "probability plot" plottas istället de empiriska sannolikheterna, normalfördelningsfallet $\Phi\left(\dfrac{x_{(i)}-\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}}\right)$, mot de teoretiska $(i-0.5)/n$.

Kvantil- och probability-plott av data från exempel 8.6.1

Sortera data i storleksordning:

$$1.1,\ 1.3,\ 1.4,\ \ldots,\ 6.2$$

beräkna (t.ex m.h.a matlab-kommandot "normcdf") motsvarande $\Phi\left(\dfrac{x_{(i)}-\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}}\right)$-sekvens

$$0.052,\ 0.070,\ 0.080\ \ldots,\ 0.977$$

och motsvarande $(i-0.5)/n$-sekvens

$$0.025,\ 0.075,\ 0.125,\ \ldots,\ 0.975$$

Ur t.ex tabell eller medelst användande av matlab-kommandot "norminv" fås att motsvarande $N(0,1)$-kvantiler är

$$-1.96,\ -1.44,\ -1.15,\ \ldots,\ 1.96$$

Kvantilplotten består av punkterna

$$(-1.96, 1.1),\ (-1.44, 1.3),\ (-1.15, 1.4),\ \ldots,\ (1.96, 6.2)$$

Och probability-plotten av punkterna

$$(0.025, 0.052),\ (0.075, 0.070),\ (0.125, 0.080),\ \ldots, (0.975, 0.977)$$