

Lösningar till tentamen i Matematisk statistik D, TMA290
11 januari 2006

- X, Y oberoende, $E[X] = 5$, $\text{Var } X = 3$, $E[Y] = 13$, $\text{Var } Y = 7$

 - $E[X - Y + 3] = E[X] - E[Y] + E[3] = 5 - 13 + 3 = -5$
 $\text{Var } [X - Y + 3] = \text{Var } X + \text{Var } Y + \text{Var } 3 = 3 + 7 + 0 = 10$
 - $E[5X + Y/4] = 5E[X] + E[Y]/4 = 5 \cdot 5 + 13/4 = 87/4 = 21.75$
 $\text{Var } [5X + Y/4] = 5^2 \text{Var } X + \text{Var } Y/4^2 = 25 \cdot 3 + 7/16 = 75.4375$
 $\sigma = \sqrt{75.4375} \approx 8.69$
 - $E[X(3 + 2Y)] = E[3X + 2XY] = 3E[X] + 2E[X]E[Y] = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 13 = 145$
- A, B händelser, $P(A)=0.2$, $P(B)=0.15$. Vi använder $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

 - A, B disjunkta, dvs $P(A \cap B) = 0$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.35$
 - A, B oberoende, dvs $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ger
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.32$
 - $B \subseteq A$, dvs $P(A \cap B) = P(B)$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B) = 0.2$
- X ="antal personer av 100 som ej bär mössa". Tillräckligt många för normalapproximation:
 $X \sim \text{Bin}(100, p) \stackrel{\text{appr}}{\sim} \text{Norm}(100p, \sqrt{p(1-p)100}) \stackrel{\text{appr}}{\sim} \text{Norm}(100p, \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100})$, där
 $\hat{p} = \frac{35}{100} = 0.35$ är punktskattningen för p . Standardnormalfördelningen ger nu

$$P \left[\frac{|X - 100p|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100}} \leq z_{0.025} \right] \approx 0.95 \Leftrightarrow P \left[\left| \frac{X}{100} - p \right| \leq z_{0.025} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \right] \approx 0.95$$

Med $z_{0.025} \approx 1.96$ ur tabell fås det 95%-iga konfidensintervallet som

$$p = \frac{x}{100} \pm z_{0.025} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \approx 0.35 \pm 0.093$$

-
-
-
-
- X ="Tid för nya spisen", $X \sim \text{Norm}(\mu_X, \sigma)$ med stickprov: $n_X = 30, \bar{x} = 3.9, s_X^2 = 1.2$
 Y ="Tid för gamla spisen", $Y \sim \text{Norm}(\mu_Y, \sigma)$ med stickprov: $n_Y = 25, \bar{y} = 4.6, s_Y^2 = 1.3$
Vi vill testa
 $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ mot $H_1 : \mu_X < \mu_Y$.

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \text{Norm}(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma^2}{30} + \frac{\sigma^2}{25}})$$

Vi skattar σ med den sammanvägda variansen $s_p^2 = \frac{30s_X^2 + 25s_Y^2}{30+25} \approx 1.245$.

Teststatistika: $T = (\bar{X} - \bar{Y}) / \sqrt{S_p^2(1/30 + 1/25)}$ approx T_{53} -fördelad.

Observerat värde: $T = (4.6 - 3.9) / \sqrt{1.245(1/30 + 1/25)} \approx 2.32$.

p-värde = $P(T \geq 2.32) \Rightarrow$ vilket med hjälp av tabell ger

$0.01 \leq p\text{-värde} \leq 0.025$. Det finns starka skäl att förkasta nollhypotesen.

- X_i = "Kalles höjd i hopp nummer i ", $i = 1, 2, 3, \dots$
 Y_i = "Annas höjd i hopp nummer i ", $i = 1, 2, 3, \dots$
Alla X_i och Y_i är oberoende, $X_i \sim \text{Norm}(246, 3)$ och $Y_i \sim \text{Norm}(243, 4)$
Inför också händelserna $A_i = \{\text{Kalle när äpplet i hopp } i\} = \{X_i \geq 250\}$ och $B_i = \{\text{Anna när äpplet i hopp } i\} = \{Y_i \geq 250\}$

$$(a) P[A_i] = P[X_1 \geq 250] = P\left[\underbrace{\frac{X_1 - 246}{3}}_{\sim Norm(0,1)} \geq \frac{250-246}{3}\right] = 1 - \Phi(4/3) \approx 1 - 0.91 \approx 0.09$$

$$(b) P[\text{Kalle lyckas först på fjärde försöket}] = P[A_1^C A_2^C A_3^C A_4] = 0.91^3 \cdot 0.09 \approx 0.068$$

$$(c) P[B_1] = P[Y_1 \geq 250] = P\left[\underbrace{\frac{Y_1 - 243}{4}}_{\sim Norm(0,1)} \geq \frac{250-243}{4}\right] = 1 - \Phi(7/4) \approx 1 - 0.9599 \approx 0.04$$

$$P[\text{Någon lyckas på 1 försök}] = P[A_1 \cup B_1] = 1 - P[A_1^C \cap B_1^C] \approx 1 - 0.91 \cdot 0.96 \approx 0.13$$

7. (a) Frekvensfunktionen f_{XY} ges av

$Y \setminus X$	0	1
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	1/8	0

$$(b) E[X] = \frac{1}{8}, E[X^2] = \frac{1}{8}, \text{Var } X = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{7}{64}$$

$$E[Y] = \frac{3}{2}, E[Y^2] = 3, \text{Var } Y = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{3}{4},$$

$$E[XY] = 0,$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}} = \frac{0 - 3/16}{\sqrt{7/64 \cdot 3/4}} = -\frac{3}{\sqrt{21}} \approx -.65.$$

8. X ="Antal fel på första 4 meterna av tyget", $X \sim Po(2)$

Y ="Längd (meter) till första felet", $Y \sim Exp(0.5)$

$$(a) E[Y] = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$(b) P[Y \geq 4] = 1 - F_Y(4) = 1 - (1 - e^{-0.5 \cdot 4}) = e^{-2} \approx 0.135$$

$$(c) P[X \leq 3 | X > 0] = \frac{P[X \leq 3 \cap Y < 3]}{P[X > 0]} = \frac{P[1 \leq X \leq 3]}{P[X > 0]} = \frac{e^{-2}(2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!})}{1 - e^{-2}} \approx 0.835$$

9. Stickprovets storlek behöver vara ungefär

$$n \approx \frac{z_{0.05}^2 \hat{p}(1 - \hat{p})}{d^2} \approx \frac{1.645^2 \cdot 0.1 \cdot 0.9}{0.025^2} \approx 390$$

10. Täthetsfunktion $f(x) = A(4x - 2x^2), 0 < x < 1$

$$(a) A \int_0^1 4x - 2x^2 dx = A4/3 \Rightarrow A = 3/4.$$

$$(b) E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 \frac{3(4x^2 - 3x^3)}{8} dx = 5/8$$