TENTAMEN: Matematisk statistik (TMS155, TMA290, LMA200), tisdagen den 23 augusti 2005, kl. 8.30–12.30, V.
Jour: Marianne Månsson, telefon 772 35 45. Besöker tentamenssalen ca kl 10.00 och 11.30.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.
Betygsgränser: 3a: 12 poäng, 4:a: 18 poäng, 5:a: 24 poäng. I samtliga fall krävs dess utom godkänt deltagande i grupparbetena. För D-studenter som läst kursen tidigare gäller särskilda regler enligt kurshemsidan.
Varje uppgift kan ge 3 poäng och maximalt antal poäng är 30.

1. a) Visa att $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.
   b) Vad beskriver korrelationen mellan två stokastiska variabler? Vad innebär det att korrelationen är 1 respektive -1? Vad är korrelationen mellan två oberoende stokastiska variabler?

2. Antag att du singlar en symmetrisk slant tre gånger. För varje krona vinner du 3 kronor och för varje klave förlorar du 3 kronor. Låt X vara din vinst.
   a) Bestäm frekvensfunktionen för X.
   b) Bestäm och rita fördelningsfunktionen.

3. Ange en lämplig teststatistika och dess fördelning under nollhypotesen i a) till e) nedan:
   a) Stickprovet $X_1, \ldots, X_n$ är normalfördelat med väntevärde μ och varians σ^2. Variansen är känd, och du vill testa nollhypotesen $\mu = \mu_0$.
   b) Som i a) men variansen är okänd.
   c) Stickprovet $X_1, \ldots, X_n$ är normalfördelat med väntevärde μ och varians σ^2. Du vill testa $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
   d) Som i a) men stickprovet är ej normalfördelat och $n \geq 30$.
   e) Som i b) men stickprovet är ej normalfördelat och $n \geq 30$.

4. På ett bord ligger 4 stycken enkronor, alla med klave uppåt. 3 av mynten är riktiga mynt, dvs. med krona på andra sidan, medan ett av mynten är ett fuskmynt med klave på bägge sidor. Du väljer ett mynt på måfå, dvs varje mynt väljs med sannolikheten 1/4, och singlar det 4 gånger. Givet att du får klave alla 4 gångerna, vad är sannolikheten att du valt fuskmyntet? Tips: Använd Bayes sats.

5. a) Man har tagit 38 stycken prover på blykoncentrationen i blodet hos personer som bor på en hårt trafikerad väg. Mätningarna ger medelvärdet 0.53 ng/ml och stickprovsstandardavvikelsen 0.08. Bestäm ett 95% konfidensintervall för väntevärdet av blykoncentrationen, under lämpliga antaganden (ange vilka).
   b) Förklara i ord vad konfidensintervallet betyder.

6. Antag att varje tentand oberoende av varandra på denna uppgift får 3, 2, 1 eller 0 poäng med sannolikheterna 0.4, 0.3, 0.2, 0.1.

a) Vad är väntevärdet och variansen för poängen för en slumpmässigt vald tentand?
b) Om 100 personer tenterar, vilken fördelning har då med god approximation poängsumman på talet för alla tentanderna? Ange även parametrarna i förd elningen.

7. a) Definiera typ I fel och typ II fel.
b) Vilken typ av fel garderar man sig främst mot vid statistiska test, och vad innebär det för vilka slutsatser som kan dras vid förkastande respektive ej förkastande av nollhypotesen?

8. Ett läkemedelsföretag har tagit fram ett nytt läkemedel mot högt blodtryck. Man påstår att detta läkemedel är effektivare än ett annat som är vanligt på marknaden, och som anses fungera bra för 60 % av patienterna. För att styrka detta påstående testar man det nya läkemedlet på 50 personer med högt blodtryck. Av dessa visar det sig att blodtrycket sänktes till en bra nivå för 35 stycken. Utför ett lämpligt test för att undersöka om man kan dra slutsatsen att det nya läkemedlet är bättre än den gamla.

9. a) Definiera väntevärdesriktighet (engelska: unbiased).
b) Antag att $X_1, \ldots, X_n$ är ett stickprov på en stokastisk variablel med väntevärde μ och varians σ^2. Visa att $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ är en väntevärdesriktig skattning av μ och att $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ är en väntevärdesriktig skattning av σ^2.
c) I skattningen av σ^2 ovan ingick μ. Ange en väntevärdesriktig skattning av σ^2 då μ är okänd. (Behöver ej visa att den är väntevärdesriktig.)

10. Vid en trafikundersökning räknar man antalet bilar som passerar en viss punkt på en väg. Strömmen av bilar i sydlig riktning kan antas följa en Poissonprocess med intensiteten 1 bil/minut och i nordlig riktning en Poissonprocess med intensiteten 2 bilar/minut. Processerna antas oberoende.
a) Vad är sannolikheten att det passerar 5 bilar under 2 minuter?
b) Använd en känd gränsvärdessats för att approximativt beräkna sannolikheten att det passerar minst 300 bilar på 90 minuter?

Lycka till!