TENTAMEN: Matematisk statistik D (TMA290) samt Matematisk statistik IT (TMS155), onsdagen den 16 mars 2005, kl. 8.30–12.30, V-huset.
Jour: Magnus Karlsson, tel 772 4291. Besöker tentamenssalen ca kl 10.00 och 11.30.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.
Betygsgränser: 3a: 12 poäng, 4:a: 18 poäng, 5:a: 24 poäng. I samtliga fall krävs dessutom godkänt deltagande i grupparbetena. För studenter som läst kursen tidigare gäller särskilda regler enligt kurshemsidan.
Varje uppgift kan ge 3 poäng och maximalt antal poäng är 30.

1. Tre maskiner som vi kallar A, B och C tillverkar en viss produkt. Maskin A står för 40% av produktionen, B står för 40% av produktionen och C står för 20% av produktionen. Av de tillverkade produkterna är 1% från A defekta, 2% från B och 3% från C.
   a) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald produkt är defekt.
   b) Antag att en produkt är defekt. Vad är sannolikheten att den kommer från maskin A?

2. Ange en lämplig teststatistika och dess fördelning i a) till e) nedan:
   a) Stickprovet $X_1, \ldots, X_n$ är normalfördelat med väntevärde μ och varians σ^2. Variansen är känd, och du vill testa $\mu = \mu_0$.
   b) Som i a) men variansen är okänd.
   c) Stickprovet $X_1, \ldots, X_n$ är normalfördelat med väntevärde μ och varians σ^2. Du vill testa $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
   d) Som i a) men stickprovet är ej normalfördelat och $n \geq 30$.
   e) Som i b) men stickprovet är ej normalfördelat och $n \geq 30$.

3. Antag att tiden till fel på kullager (mätt i 10^5 cykler) kan antas vara Weibullfördelad med parametrarna $\alpha = 110$ och $\beta = 1.2$. Weibullfördelningen har täthetsfunktion
$$f(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha} e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}},$$
   för $x \geq 0$.
   a) Beräkna sannolikheten att tiden till fel är mindre än 160.
   b) Visa att $f(x)$ verkligen är en täthetsfunktion för en stokastisk variabel.

4. I genomsnitt får en jourläkare 4.3 akutfall på ett jourpass, och man kan anta att fallen inträffar enligt en Poissonprocess.
   a) Vad är sannolikheten att det inte inträffar något akutfall under ett pass?
   b) Vad är sannolikheten att det inträffar totalt 2 akutfall under två stycken pass?

5. a) Vad är korrelationen mellan X och Y i följande fall (här behövs inte beräkningar eller motivationer - svar räcker):
   (i) $Y = 3 + 5X$
   (ii) $Y = 8 - 17X$

(iii) $Y = X^2$, där $X = -1$ med sannolikheten 1/2 och $X = 1$ med sannolikheten 1/2.
b) Visa att kovariansen och korrelationen mellan X och Y är 0 om X och Y är oberoende. (Ni kan välja att visa det i kontinuerliga eller diskreta fallet.)

6. En läkare intresserar sig för sambandet mellan dosering av ett visst preparat och tiden tills patienten tillfrisknat. Läkaren har gjort en studie på fem patienter där hon bestänt dosnivån (i gram) och har observerat tid till tillfrisknande (i timmar).

Dosnivåer:	1.2	1.0	1.5	1.1	1.4
Tillfriskningstider:	25	40	10	27	16

a) Hjälp läkaren med att skatta parametrarna i en regressionsmodell. (Variansen behöver ni inte skatta.)
b) Verkar den linjära modellen vara lämplig? Motivera ditt svar.

7. I en fabrik provar man en ny reningsmetod och vill undersöka hur många kilo svavel som släpps ut per dygn. Det varierar naturligtvis från dygn till dygn, och man kan anta att utsläppet i kilo per dygn är normalfördelat med okänt väntevärde och varians. Man observerar följande 10 värden (kg/dygn):
21.2, 24.1, 22.7, 20.9, 19.8, 23.2, 20.7, 21.8, 21.4, 22.3.
Gör ett 95 % konfidensintervall för väntevärdet.

8. Tillåten maxvikt i hissen i matematiskt centrum är 630 kg eller 8 personer. Antag vidare att vikten på manliga respektive kvinnliga studenter kan antas vara normalfördelade med väntevärdena 77.3 kg och 62.9 kg och standardavvikelserna 10.1 respektive 8.3. Om fem slumpmässigt valda manliga och tre kvinnliga studenter samtidigt går in i hissen, vad är då sannolikheten att deras sammanlagda vikt överskrider den tillåtna vikten?

9. I en viss sorts oberoende försök är sannolikheten att lyckas p. Den rådande uppfattningen är att $p = 0.25$. Du misstänker dock att $p < 0.25$. Utför lämpliga test i följande två undersökningar.
a) Du upprepar försöket 5 gånger och lyckas en av dessa.
b) Du upprepar försöket tills du lyckas för första gången, vilket sker på 7e försöket.

10. Antag att 5 punkter väljs på måfå (dvs med kontinuerlig likformig fördelning) i intervallet (0,1), oberoende av varandra.
a) Bestäm täthetsfunktionen för avståndet från 0 till den närmsta punkten.
b) Bestäm täthetsfunktionen för avståndet från 0 till punkten längst bort.

Lycka till!