

TENTAMEN: Matematisk statistik D (TMA290) samt Matematisk statistik IT (TMS155), tisdagen den 29 mars 2005, kl. 14.00–18.00, V-huset.

Jour: Marianne Månsson, tel 772 3545. Besöker tentamenssalen ca kl 15.30 och 16.45.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta.

Betygsgränser: 3a: 12 poäng, 4:a: 18 poäng, 5:a: 24 poäng. I samtliga fall krävs dessutom godkänt deltagande i grupparbetena. För studenter på D som läst kursen tidigare gäller särskilda regler enligt kurshemsidan.

Varje uppgift kan ge 3 poäng och maximalt antal poäng är 30.

1. Antag att varje tentand oberoende av varandra på denna uppgift får 3, 2, 1 eller 0 poäng med sannolikheterna 0.5, 0.2, 0.1, 0.2.
 - a) Vad är väntevärdet och variansen för poängen för en slumpmässigt vald tentand?
 - b) Om 100 personer tenterar, vilken fördelning har då med god approximation poängsumman på talet för alla tentanderna? Ange även parametrarna i fördelningen.
2.
 - a) Definiera p-värde och förklara hur det används i ett statistiskt test.
 - b) Definiera samt beskriv i ord vad ett konfidensintervall är.
3. Livslängden X för en fordonskomponent har modellerats som en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktionen

$$f(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}, \text{ för } x > 0.$$

(Enhet: 10000 km körsträcka.) Parametrarna har skattats till $a = 0.0024$, $b = 2.2$. För att bedöma sannolikheten att komponenter som körts felfritt sträckan t håller i ytterligare ett serviceintervall, dvs 15000km = 1.5 enheter, så beräknas den betingade sannolikheten

$$P(X > t + 1.5 | X > t).$$

Bestäm denna sannolikhet för $t = 3$ och $t = 9$.

4. Mängden utsläppta partiklar PM10 har mätts på 16 stycken dieselmotorer. Det är rimligt att se data som oberoende och normalfördelade. Gör ett 90% konfidensintervall för variansen i denna normalfördelning. Data: 11.13, 9.12, 8.81, 7.34, 9.59, 6.33, 10.43, 12.25, 7.62, 10.72, 11.51, 5.81, 6.12, 10.14, 8.20, 10.38.
5. a) Visa att för kovariansen mellan två stokastiska variabler X och Y gäller

$$Kov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

- b) Visa att $E[XY] = E[X]E[Y]$ om X och Y är oberoende.

6. Saxat från nätet:

Murphys lag är ett av den moderna världens mest kända talesätt. Den vanliga formuleringen är "Allt som kan gå fel, gör det"; ursprungligen lär den ha lytt "Om det finns två eller fler sätt att göra något, och ett av dessa sätt leder till en katastrof, så kommer någon att göra det på det sättet".

Oavsett hur man formulerar den så är det här en viktig lag att minnas för alla konstruktörer och inte minst för programkonstruktörer och programmerare. Tillämpningen på vårt område blir:

- Om ett användargränssnitt tillåter inmatning av felaktiga data, så kommer felaktiga data att matas in.
- Om en utmatning kan misstolkas av användaren, så kommer den att misstolkas.
- Om en rutin inte fungerar för en viss kombination av data, så kommer denna kombination att uppträda.

Antag nu att du skrivit ett program där just dessa tre problem kan uppstå. Låt A = felaktiga data kommer att matas in,

B = utmatningen misstolkas,

C = en icke-fungerande kombination av data uppträder.

Låt för enkelhetens skull $P(A) = P(B) = P(C) = 0.1$.

a) Antag att händelserna A , B och C är oberoende och beräkna sannolikheten att alla tre händelser inträffar.

b) Antag att händelserna A , B och C är oberoende och beräkna sannolikheten att minst en av de tre händelserna inträffar.

c) Nu gör vi inga antagande om beroendet mellan händelserna, och söker en övre gräns för sannolikheten att minst en av de tre händelser inträffar.

7. För att jämföra fiskars tillväxt i olika miljöer så väger och märker man ett antal ungefär lika stora fiskar som sedan fördelas slumpvis och får leva i nätburar i respektive vatten. Efter en tid mäter man fiskarnas viktökning i gram:

Miljö 1: 72, 35, 54, 68, 61, 49, 66, 70

Miljö 2: 39, 54, 50, 51, 46, 43, 33

Antag att alla fiskar tillväxer oberoende av varandra. Pröva med ett lämpligt test om väntevärdet av tillväxten kan vara lika i de båda miljöerna. (Lika varians och normalfördelning får förutsättas.)

8. Antag att den radioaktiva bakgrundsstrålningen följer en Poissonprocess med intensiteten 2744 impulser per timme. Efter en misstänkt radioaktiv läcka görs en mätning av strålningen. Kan man bevisa någon ökad strålning om man under 30 minuter får 1503 radioaktiva impulser?

Tips: Om X är Poissonfördelad med parameter λ , så är X approximativt normalfördelad med väntevärde λ och varians λ , för stora λ .

9. Vid tiden noll frigörs en partikel i en punkt som är placerad på en talaxel enligt en normalfördelning med väntevärde 1 och varians 4. Därifrån rör den sig slumpmässigt på talaxeln så den oberoende av startpunkt vid tiden 1 har förflyttat sig X från utgångspunkten, där X är normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9. Bestäm sannolikheten att partikeln ligger på den negativa sidan vid tiden 1.
10. En bräda av längden L kapas i två delar och kapningspunkten är likformigt fördelad över brädans längd. Låt X vara längden på den största biten och bestäm fördelningsfunktion och frekvensfunktion för X .

Lycka till!