Bilen och getterna via betingade sannolikheter

Olle H

Du deltar i ett tramsigt tävlingsprogram i TV, och erbjuds välja en av tre luckor. Bakom en av dem döljer sig en åtråvärd bil, och bakom de två övriga döljer sig mindre åtråvärda getter. När du valt en lucka väljer programledaren en av de andra – alltid en av getluckorna – och öppnar denna. Därpå erbjuder han dig valet mellan att stå fast vid din ursprungliga lucka, eller byta till den andra oöppnade. Vilket av dessa alternativ bör du välja?

□□□□

För att ta ställning till detta behöver vi ansätta en sannolikhetsmodell. Kalla luckorna L_1, L_2 och L_3, och låt A_i beteckna händelsen att bilen finns bakom lucka L_i. Det är rimligt att ansätta

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{3}$$

dvs att varje lucka från början har lika stor sannolikhet att dölja bilen.

Om luckan du valt från början döljer en get, så har programledaren inget val beträffande vilken lucka han skall öppna. Men om du råkat välja luckan med bilen har han två möjligheter, och för att modellen skall vara väldefinierad behöver vi ange hur han i så fall väljer. Låt oss anta att han då väljer en av de övriga luckorna på måfå (dvs med sannolikhet 1/2 vardera).

Antag nu[1] att du bestämt dig för att från början satsa på lucka L_1, och att det visar sig att programledaren därpå öppnar lucka L_2. Då finns bilen bakom L_1 eller L_3, men med vilka sannolikheter? Vi skall betinga på den information vi har, nämligen händelsen

$$B = \{\text{programledaren väljer } L_2\}\,.$$

Med hjälp av Bayes sats får vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_3|B) &= \frac{\mathbf{P}(B \cap A_3)}{\mathbf{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(B \cap A_3)}{\mathbf{P}(B \cap A_1) + \mathbf{P}(B \cap A_2) + \mathbf{P}(B \cap A_3)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}(B|A_3)}{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B|A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B|A_2) + \mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}(B|A_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

vilket stämmer med vad Sofia Andersson på ett annat sätt kom fram till i sin artikel "*Sannolikhetsteori – vetenskapen bakom ett tärningskast*".

[1] Övriga fall kan analyseras på samma sätt.