Projekt P1 i kursen Matematisk Statistik F1:

Slumpvandring i ett stokastiskt medium

Projektuppgiften går ut på datorsimulering av en stokastisk modell hämtad från statistisk fysik, och består av två deluppgifter, nämligen

(a) uppskattning av kritiskt värde hos nodperkolation på det tvådimensionella kvadratiska gittret, och

(b) uppskattning av hur snabbt slumpvandring med inbyggd drift i ovanstående perkolationsprocess driver iväg.

Projektet utförs enskilt eller i grupper om två teknologer, och redovisas skriftligt, i en rapport.

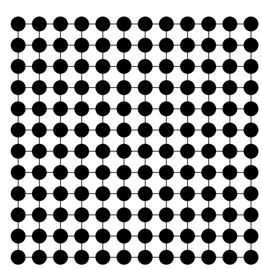
Projektet ställer stora krav på självständigt tänkande. Exempelvis väljer ni själva i vilket programspråk ni skall arbeta, och kan inte räkna med någon datorhandledning.

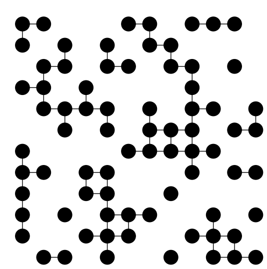
Deluppgift (a)

Perkolationsteori handlar om konnektivitetsegenskaper i oordnade (stokastiska) material. En grundläggande modell är följande.

Betrakta ett kvadratiskt gitter som i den vänstra figuren nedan, med noder i heltalspunkter i planet, och länkar som förbinder horisontella och vertikala närmsta grannar.

För varje nod i detta gitter singlar vi en slant med $\mathbf{P}(krona) = p$ för något givet $p \in (0, 1)$. Om slanten visar klave kastar vi bort noden (tillsammans med alla länkar utgående från noden), medan krona betyder att vi sparar noden. Detta görs oberoende för olika noder. Då kanske vi får ett resultat liknande det i den högra figuren.





I perkolationsteorin är vi intresserade av sammanhängande komponenter i den slumpmässiga struktur vi får efter att ha kastat bort noder enligt ovan. Ju större p är, desto fler noder får vi behålla, och desto lättare är det att få stora sammanhängande komponenter. Om man låter det ursprungliga kvadratgittret fortsätta oändligt långt åt alla håll, och frågar efter existensen av en *oändlig* komponent, gäller följande resultat.

Sats: *Det finns ett kritiskt värde $p_c \in (0, 1)$ sådant att sannolikheten att få en oändlig komponent i nodperkolation på kvadratgittret med parameter p uppfyller*

$$\mathbf{P}(\exists\ \textit{oändlig komponent}) = \begin{cases} 0 & \textit{då} \quad p < p_c \\ 1 & \textit{då} \quad p > p_c\,. \end{cases}$$

Ingen har lyckats bestämma p_c exakt. Deluppgift (a) går ut på att simulera perkolation med olika värden på p, och därvid försöka få fram ett närmevärde för det kritiska värdet p_c.

Detta kräver en del eftertanke. Det är naturligtvis omöjligt att simulera perkolation på *hela* kvadratgittret – man är tvungen att inskränka sig till en ändlig bit av detta. Då kan man inte se om man fått någon oändlig komponent, utan är tvungen att försöka formulera något kriterium för det ändliga gitter man simulerat, som skall indikera om motsvarande oändliga gitter ger en oändlig komponent. Vad kan tänkas vara ett rimligt sådant kriterium?

En annan sak att ha i åtanke är att för att få en något så när god uppskattning av det kritiska värdet p_c, behöver man simulera *avsevärt* större gitter än de i figuren ovan.

Deluppgift (b)

Låt oss för ett ögonblick återgå till det fullständiga oändliga kvadratgittret (där vi ännu inte kastat bort några noder). En *slumpvandring* i diskret tid på detta gitter kan definieras på följande vis. Vid tiden 0 står vår slumpvandrare i origo, och väljer att till tiden 1 ta ett steg uppåt, nedåt, åt höger eller åt vänster med sannolikhet $\frac{1}{4}$ vardera. Från den nya positionen tas ett nytt steg, till någon av de fyra grannarna med sannolikhet $\frac{1}{4}$ vardera, och så vidare. Riktningarna som väljs vid olika tidpunkter antas oberoende.

Nu komplicerar vi modellen genom att införa en *driftparameter* $\beta \in (0, \frac{1}{4})$. Varje gång slumpvandraren tar ett steg väljer han att gå

$$\begin{cases} \text{uppåt} & \text{med sannolikhet} \quad \frac{1}{4} \\ \text{nedåt} & \text{med sannolikhet} \quad \frac{1}{4} \\ \text{åt höger} & \text{med sannolikhet} \quad \frac{1}{4} + \beta \\ \text{åt vänster} & \text{med sannolikhet} \quad \frac{1}{4} - \beta \, . \end{cases} \tag{1}$$

Parametern β anger alltså en viss dragning åt höger hos slumpvandraren. Detta kan skulle t.ex. kunna vara en första grov modell för hur en laddad partikel rör sig i ett elektriskt fält.

Om vi nu låter X_n beteckna partikelns (slumpvandrarens) position i x-led vid tidpunkt n, så gäller (pga en variant av de stora talens lag) att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 2\beta \tag{2}$$

med sannolikhet 1.

Låt oss nu komplicera situationen ytterligare genom att *först* tunna ut gittret enligt perkolationsmodellen i uppgift (a), och *sedan* släppa iväg en slumpvandrare från origo. Slumpvandraren tar steg enligt (1), med modifieringen att om han försöker gå till en nod som är bortrensad så står han istället still en tidsenhet.

Två olika situationer är nu tänkbara. Den ena är att slumpvandraren sitter fast i en ändlig komponent. Då kommer X_n aldrig att överskrida någon viss gräns, och gränsvärdet i (2) blir därför 0. Den andra möjligheten, då $p > p_c$, är att slumpvandraren sitter i en oändlig komponent. Det är känt att vi i det fallet får

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \mu \tag{3}$$

med sannolikhet 1, för någon deterministisk "hastighetskonstant" som bara beror på p och β.

Deluppgift (b) går nu ut på att simulera en sådan slumpvandring, för något fixt p, och olika värden på β. Välj p så att det är klart större än det kritiska värdet p_c, men klart mindre än 1. Försök uppskatta hur hastighetskonstanten $\mu = \mu(p, \beta)$ varierar, då β varierar.

Varning: Konvergensen i (3) är känd för att vara ganska långsam, så det finns risk att era simuleringar kommer att uppvisa tämligen oregelbundna resultat. Låt er inte nedslås alltför mycket av detta. Och tänk på att resultaten blir bättre ju större perkolationsgitter ni (och era datorer) orkar med att simulera.

En första naiv gissning angående hur hastigheten μ varierar som en funktion av β skulle kunna vara att den är växande i β – ju större dragningskraft på partikeln desto snabbare borde den driva iväg. Något överraskande har det nyligen bevisats[1] att detta *inte* är sant! Kan ni se några tecken på detta i era simuleringar? Bonusfråga: Kan ni ge någon intuitiv förklaring till att det inte skulle "löna sig" att öka β om vi vill få slumpvandraren att gå snabbt åt höger?

Allmänna regler för projektet

Rapporten skall utformas så att den kan läsas och förstås av de av era kurskamrater som inte vare sig genomfört detta projekt eller ens läst projektformuleringen. Den exakta programkoden behöver inte redovisas, men däremot skall framgå i stora drag hur simuleringen går till.

Vid poängsättning av rapporten kommer stor vikt att läggas vid både form och innehåll. Rapporten värderas till 0, 3, 4 eller 5 poäng, som kan tillgodoräknas vid den ordinarie tentamen den 24 maj, samt vid omtentamen den 19 aug 2003, men ej vid senare omtentamina.

Deadlines (ej förhandlingsbara) för inlämning

Inlämning 1: I samband med föreläsningen måndag 28 april.

Inlämning 2: I samband med föreläsningen måndag 12 maj.

Efter deadline 1 kommer besked att ges (per email) senast fredag 2 maj om hur mycket projektrapporten är värd (0, 3, 4 eller 5 poäng), samt eventuellt något om vilka förbättringar som krävs för att erhålla högre poäng.

Efter deadline 2 kommer slutligt besked om poäng att ges (per email) senast onsdag 21 maj.

Det är tillåtet att strunta i Inlämning 1, men observera att ni då går miste om ett utmärkt tillfälle till värdefull feedback.

Observera att inlämning skall ske skriftligt på papper, dvs elektronisk inlämning accepteras ej. Glöm inte att ange emailadress så att ni kan få feedback.

---

[1] Detta gjordes samtidigt av å ena sidan Sznitman i uppsatsen *On the anisotropic walk on the supercritical percolation cluster*, och å andra sidan Berger, Gantert och Peres i uppsatsen *The speed of biased random walk on percolation clusters*, se `http://www.math.ethz.ch/~sznitman/preprint.shtml` respektive `http://stat-www.berkeley.edu/users/noam/` .