# Sannolikhetsteori –
## vetenskapen bakom ett tärningskast

av Sofia Andersson

**Spelar du kanhända på Lotto? Om inte spelar du kanske Yatzy med dina vänner ibland. Och vem har inte dragit lott om vem som ska ta hand om disken!**

**I alla dessa fall har du säkert, medvetet eller omedvetet, funderat över hur stor sannolikheten är att du ska vinna eller förlora. Men har du någon gång funderat över att det ligger en hel vetenskap bakom?**

När det gäller disken är det nog ingen som invänder mot att om ni är två stycken som drar lott har ni båda 50% chans var att slippa undan. Om du har skrapat ihop tre femmor och har ett kast kvar håller nog många med dig om att du har $1/6 \cdot 1/6$, dvs $1/36$ chans att få Yatzy. Om du försöker tänka ut hur stor chansen är att du ska vinna på Lotto, ja, antingen ger du upp beräkningarna och lämnar in din rad, eller räknar du färdigt och satsar pengarna på något annat.

## En vetenskap för slumpen

Vad du har använt dig av, då du tänkt ut att du har 50 % chans att klara dig undan disken, är sannolikhetsteori. Sannolikhetsteori är teorin som formulerar modeller för slumpförsök, alltså sådana försök som kan upprepas men där man inte helt och hållet kan förutsäga vad som kommer att hända; singlar du slant vet du att du antingen får krona eller klave, men du kan inte säkert säga vilketdera.

Figur 1. Gerolamo Cardano (1501–1576)

## Tärningen som redskap

Sannolikhetsteorin har faktiskt sitt ursprung i gamla spel, t ex med tärningar, och lottning. Redan på 900-talet kände man till att ett kast med tre tärningar kan ge 56 olika sifferkombinationer, men det skulle dröja länge innan man började fundera över att vissa av dessa 56 kombinationer kunde förekomma oftare än andra. Att slumpen är ett så förbisett begrepp kan förklaras på olika sätt. Kanske var orsaken den deterministiska världsuppfattningen som rådde, att allt som skedde var förutbestämt.

Men med renässansen började ett nytt tankesätt att bryta igenom. Omkring mitten av 1500-talet insåg den italienske matematikern, läkaren och astrologen Cardano (1501–1576) att man med hjälp av kombinatorik kunde beräkna sannolikheter för olika utfall vid kast med en eller flera tärningar. Cardano formulerade i princip det man brukar kalla för den klassiska sannolikhetsdefinitionen, dvs han definierade sannolikheten för en händelse som antalet gynnsamma utfall dividerat med antalet möjliga. Vad är t ex sannolikheten att få en trea vid ett tärningskast? Ja, antalet möjliga utfall är sex stycken och gynnsamma är endast ett av dem, nämligen då vi får en trea. Sannolikheten för att få en trea blir således ett dividerat med sex, en sjättedel.

## Jakten på en fast matematisk grund

Sannolikhetsteorins utveckling fortsatte sakta men säkert, och många framstående vetenskapsmän, som t ex Fermat, Pascal och Gauss, bidrog till utvecklingen. Flera ansträngningar gjordes för att ge sannolikhetsbegreppet en bättre teoretisk grund att stå på. I början av 1800-talet definierade den franske matematikern Poisson sannolikhetsbegreppet på ett nytt sätt, nämligen som gränsvärdet av en frekvenskvot. Om vi återigen tittar på vad sannolikheten är att få en trea vid ett tärningskast resonerar vi nu istället så här: Om vi kastar en tärning många gånger

Figur 2. Andrey Kolmogorov, världens – hittills – främste sannolikhetsteoretiker.

kommer ungefär en sjättedel av kasten att ge treor, alltså är sannolikheten för att få en trea en sjättedel.

## Världens främste sannolikhetsteoretiker

Men fortfarande saknade sannolikhetsteorin fast matematisk grund. Det var först 1933 som det arbete publicerades som kom att bli avstampet för den moderna sannolikhetsteorin, ”Sannolikhetsteorins grunder”. Författare var den ryske matematikern Kolmogorov (1903–1987); världens – hittills – främste sannolikhetsteoretiker. I hans arbete finner vi en tredje sannolikhetsdefinition – den abstrakta. Kolmogorov definierade sannolikheten för en händelse endast som ett tal som uppfyller vissa villkor. Definitionen hjälper oss inte att konkret beräkna sannolikheter, men samtidigt är det först med denna definition som vi kan uttala oss om

Figur 3. Sannolikheten att få en trea vid ett tärningskast är 1/6.

sannolikheter för enskilda händelser, som t ex ”Vad är sannolikheten att världen får skåda en ännu större sannolikhetsteoretiker än Kolmogorov?”. Här kan vi varken använda klassiska sannolikhetsdefinitionen eller beräkna gränsvärdet av en frekvenskvot.

## Lita inte alltid på din intuition!

Naturligtvis behöver vi inte låta Kolmogorovs abstrakta sannolikhetsdefinition krångla till det alltför mycket för oss. Sannolikheten för att få en trea vid ett tärningskast blir fortfarande en sjättedel, precis som vår intuition säger oss. Vi behöver faktiskt inte läsa ”Sannolikhetsteorins grunder” för att förstå och roas av en hel mängd kluriga sannolikhetsteoretiska problem. I många fall leder vår intuition oss in på rätt spår. Men att alltid lita på intuitionen kan vara bedrägligt. Låt oss nu titta lite närmare på ett exempel där man kanske ska vara aningen mer försiktig och tänka till ett par gånger extra innan man uttalar sig!

### Var finns bilen?

Föreställ dig ett TV-program dit man kan ringa in och vara med i en tävling som går till enligt följande. Det finns tre luckor att välja mellan. Tävlingsledaren såväl som den tävlande vet att det bakom en av luckorna finns en bil, och bakom var och en av de två andra en get. Den tävlande, som naturligtvis inte vet *var* bilen finns, får börja med att välja en lucka. Därefter öppnar tävlingsledaren, som vet vad som finns var, en av de andra luckorna. När tävlingsledaren öppnar denna lucka väljer han alltid en lucka där det finns en get. Detta är naturligtvis alltid möjligt; har bilen blivit vald finns det två getter kvar och har en av getterna blivit vald finns den andra kvar. Slutligen får den tävlande möjlighet att ångra sig och byta till den andra ännu ej öppnade luckan. Om du var den tävlande, skulle du då byta lucka eller hålla fast vid den du valt från början? Blir sannolikheten för att du ska vinna bilen större, mindre eller kanske precis densamma om du byter lucka?

### Upprörda läsare

Just detta problem ställde till med stor uppståndelse i USA för några år sedan. Det var Marilyn vos Savant, författare till en matematikspalt i en amerikansk tidskrift, som formulerade problemet och gav en lösning. Hennes slutsats var att man borde byta lucka. Om man håller fast vid den första luckan är sannolikheten att vinna bilen en tredjedel, men om man byter lucka ökar man sina chanser till två tredjedelar, det hävdade Marilyn vos Savant. Många läsare protesterade mot denna lösning och menade att det inte spelade någon roll om man bytte eller inte, sannolikheten för att vinna bilen var lika stor i båda fallen. Men Marilyn vos Savant stod på sig. Det gjorde läsarna också, och Marilyn vos Savant fick utstå en hel del spott och spe från "vanliga" människor såväl som matematikprofessorer. Men även om majoriteten var emot henne fick hon så småningom upprättelse, och vi kan förvisso hålla med henne om att "matematiska lösningar inte avgörs genom omröstningar".

## Förklaringen

Låt oss titta närmare på Marilyn vos Savants förklaring. Antag att du väljer en av getterna från början. Bakom de två kvarvarande luckorna finns det då en get och en bil. Eftersom spelets regler säger att tävlingsledaren måste ta bort en get har han nu inget val utan att ta bort den kvarvarande geten och lämna bilen. När du nu byter lucka kommer du alltså helt säkert att få bilen.

Låt oss istället anta att du väljer bilen från början. Tävlingsledaren har nu två getter att välja mellan och tar slumpmässigt den ena, och lämnar den andra. Vid ditt byte denna gången kommer du alltså att byta bort bilen mot en get.

Sammanfattningsvis kan vi alltså konstatera att om du från början väljer en get kommer du säkert att få bilen och vice versa, *om* du har strategin att byta lucka. Så bör du då tillämpa denna strategi? Ja, eftersom det från början finns två getter och endast en bil är ju sannolikheten att du väljer en get två tredjedelar och sannolikheten att du väljer bilen en tredjedel. (Här kan vi t ex använda den klassiska sannolikhetsdefinitionen med antalet gynnsamma utfall genom antalet möjliga.) Således är sannolikheten att du till slut får bilen två tredjedelar om du använder dig av taktiken att byta lucka.

Man kan just undra vad Kolmogorov hade haft för lösning på problemet!