

Projekt 2.

Analys och simulering av ett digitalt kommunikationssystem

Erik Ström
Inst. för Signaler och system
Chalmers Tekniska Högskola

16 april 1998

1 Introduktion

I det här dokumentet kommer vi att illustrera en teknisk tillämpning, nämligen digitala kommunikationssystem, för vilken stokastiska processer spelar en stor roll.

Uppgiften för ett kommunikationssystem är att överföra en signal från en källa till en användare med tillräckligt liten distortion. Beroende på applikationen kan användaren tolerera mer eller mindre distortion. När vi t.ex. lyssnar på musik tolererar vi mindre distortion (brus) än när vi lyssnar på direktsändningen från bulgariska mästerskapen i curling.

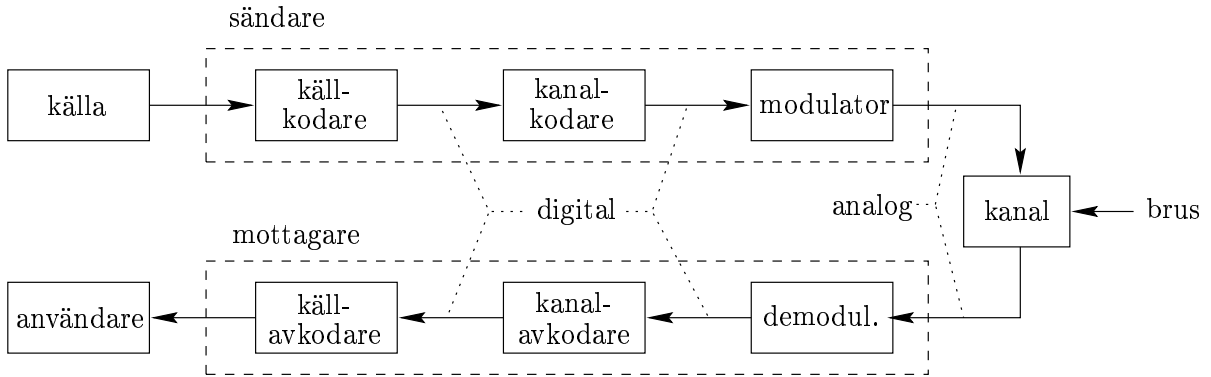
Ett digitalt kommunikationssystem karaktäriseras av att informationssignalen någonstans i systemet kan representeras med ett binärt ord med ändligt antal bitar. Om källsignalen från början var analog, t.ex. en talsignal, betyder detta att signalen måste samplas och kvantiseras. Detta ger upphov till distortion, även om samplingsfrekvensen är tillräckligt hög för att uppfylla samplingsteoremet [2].

Källsignalen kan också vara digital från början. Ett exempel på en naturlig digital signal är beloppet på skuldbeskedet från CSN som vi alla (nåja, nästan alla) får hemskickat varje år. Skuldbeloppet kan representeras med ett ändligt (men ej föraktligt) antal bitar.

Även digitala signaler kan utsättas för distortion när de transmitteras. Det finns en mängd olika distortionsmått för digitala signaler, t.ex. sannolikheten för att en bit i källsignalen uppfattas felaktigt av mottagaren, dvs. bitfelssannolikheten P_b . Om $P_b = 0$ är kommunikationssystemet perfekt (inga fel uppstår i transmissionen). Om $P_b = 1/2$ är systemet värdelöst¹.

¹Det är intressant att notera att om vi vet att $P_b = 1$ kan vi återskapa källsignalen utan fel genom att invertera varje bit vid mottagaren (eftersom vi vet att varje mottagen bit är fel).

Ett digitalt kommunikationssystem kan delas upp i sex olika block enligt figur 1. Sändaren består av de tre översta blocken: källkodare, kanalkodare och modulator. Mottagaren består av de tre undre blocken: demodulator, kanalavkodare och källavkodare.



Figur 1: Ett blockschema över ett digitalt kommunikationssystem

Om källsignalen är analog omvandlas den till en digital signal i källkodaren. Källkodaren kan vara en vanlig A/D-omvandlare eller en mycket mer komplicerad krets som t.ex. källkodaren i GSM (global system for mobile communications). Källkodaren försöker också att representera källsignalen med så få bitar per sekund som möjligt. I GSM samplas först talsignalen med 8 kHz och varje sampel kvantiseras till 8 bitar. Det ger en datahastighet på $8 \times 8 \times 10^3 = 64$ kbit/s. Källkodaren skalar på ett intelligent sätt bort bitar från källsignalen och utsignalen från kodaren är en bitström med hastigheten 13 kbit/s. Med andra ord har bithastigheten minskats med nästan en faktor 5.

Utsignalen från källkodaren skickas sen till kanalkodaren som skyddar signalen genom att lägga till ett antal kontrollbitar (paritetsbitar) till informationssignalen. Syftet med kontrollbitarna är att kanalavkodaren skall kunna upptäcka och eventuellt rätta de bitfel som uppstår på kanalen. I GSM adderas nästan en kontrollbit per informationsbit och bithastigheten ut från kanalkodaren är 22.8 kbit/s.

Det sista blocket i sändaren är modulatern som omvandlar block om k bitar till en analog signal som skickas över kanalen. I det enklaste fallet är $k = 1$ och man kallar då modulatern för en binär modulator. I GSM används en modulationsform som kallas Gaussian minimum shift keying (GMSK) där varje bit representeras som en sinussignal vars frekvens beror på om biten var en etta eller en nolla.

Kanalen är det fysiska medium som är tillgängligt för kommunikationssystemet. Ett exempel på en kanal är en kabel, en optisk fiber, en radiokanal eller en CD-rom skiva. Gemensamt för alla verkliga kanaler är att de distorderar den sända signalen. I det enklaste fallet antar vi att kanalen endast adderar brus, dvs. den mottagna signalen är summan av den sända signalen och en brussignal.

Mottagarens block utför i princip den inversa operationen till sändarens block, dvs. demodulatorens omvandlar den mottagna analoga signalen till en bitström, kanalavkodaren rättar de fel som kan upptäckas och källavkodaren omvandlar slutligen bitströmmen till en källsignal.

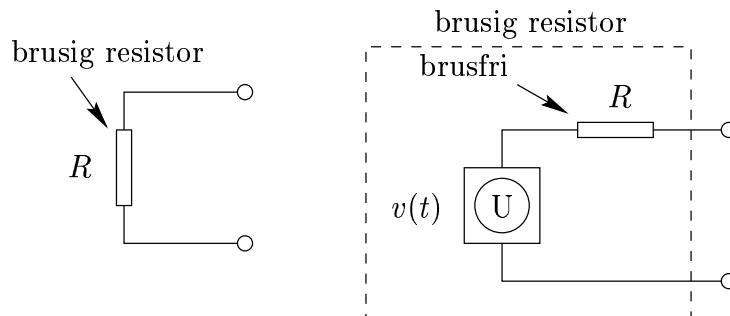
Alla signaler som vi beskrivit ovan kan modelleras som stokastiska processer. Källsignalen är t.ex. slumpmässig för alla utom för källan själv (och ibland även för den, vi har väl alla yttrat något som förvånat oss själva, eller hur?). Av detta följer att alla signaler som beror på källsignalen är stokastiska processer. Brussignalen är också slumpmässig (som vi kommer att se i avsnitt 2 nedan).

Att behärska stokastiska processer är därför av yttersta vikt för kommunikationsingenjörer.

2 Brus i elektriska kretsar

Alla elektriska ledare innehåller fria elektroner (eller andra laddningsbärare). Om ledaren har en temperatur som överstiger den absoluta nollpunkten (0 K eller -273.15 C) uppvisar de fria elektronerna ett slumpmässigt rörelsemönster i ledaren. De slumpmässiga elektronrörelserna ger upphov till en slumpmässig spänning.

En fysisk ledare med resistans R kan ersättas med en brusig spänningskälla i serie med en brusfri ledare med resistans R , enligt figur 2.



Figur 2: Modell av en brusig resistor

Det kan visas med hjälp av kvantmekanik [3, 1] att $v(t)$ kan betraktas som en realisering av en svagt stationär gaussisk (normalfördelad) stokastisk process $\{V(t)\}$ med väntevärdessfunktion $\mathbf{E}\{V(t)\} = 0$ och spektraltäthet

$$R_V(f) = 2R \left[\frac{h|f|}{2} + \frac{h|f|}{e^{h|f|/kT} - 1} \right]$$

där $h = 6.2 \times 10^{-34}$ Js är Plancks konstant, $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K är Boltzmanns konstant och T är den absoluta temperaturen hos ledaren.

Eftersom bruset beror på temperaturen kallas det ibland för termiskt brus.

Vid rumstemperatur (ca. 300 K) och vid frekvenser under 100 GHz är faktorn $|hf/kT| < 0.02$ och en god approximation till $e^{hf/kT}$ är

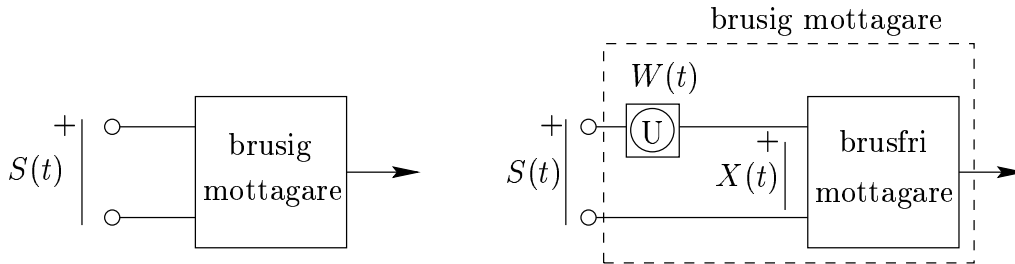
$$e^{hf/kT} \approx 1 + \frac{hf}{kT}$$

Spektraltätheten för $\{V(t)\}$ blir då

$$R_V(f) \approx 2R \left[\frac{hf}{2} + \frac{hf}{hf/kT} \right] = 2R \left[\frac{hf}{2} + kT \right] \approx 2RkT$$

eftersom $hf < 6.2 \times 10^{-23} \ll kT = 4.14 \times 10^{-21}$. Med andra ord kan vi betrakta $\{V(t)\}$ som vitt brus.

En mottagare i ett kommunikationssystem består bla. av elektriska kretsar som filter och förstärkare. Varje resistans i kretsen kommer att ge upphov till termiskt brus. Precis som att man kan ersätta en brusig resistor med en brusälla och en ideal resistor, kan vi ersätta en brusig mottagarkrets med en brusälla och en brusfri mottagarkrets. Brusällans signal adderas till mottagarens insignal, jämför figur 1 och 3.



Figur 3: Modell av brusig mottagare

3 Ett enkelt binärt kommunikationssystem

I den här labben kommer vi att studera ett enkelt binärt kommunikationssystem utan käll- eller kanalkodare. Källsignalen är en talsignal som är samplad med samplingsfrekvens 8 kHz och varje sampel är kvantiserad med 8 bitar. Med andra ord måste kommunikationssystemet ha datahastigheten $8 \times 8 = 64$ kbit/s, vilket betyder att en bit skall skickas varje $T = 1/64 \times 10^3 \approx 15.6 \mu s$.

Vi kommer nu att prata om bitströmmar som signaler som antar värdet -1 eller 1 , där amplituden -1 motsvarar en binär nolla och 1 motsvarar en binär etta.

Informationssignalen modelleras som en svagt stationär tidsdiskret stokastisk process $\{D(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, där $D(m) \in \{-1, 1\}$ är en diskret stokastisk variabel med frekvensfunktion

$$f_{D(m)}(d) = \mathbf{P}\{D(m) = d\} = \begin{cases} p_{-1}, & d = -1 \\ p_1 = 1 - p_{-1}, & d = 1 \end{cases}$$

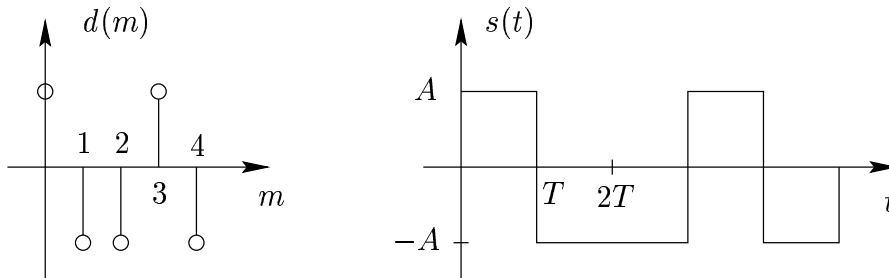
Vi noterar att $f_{D(m)}(d)$ inte beror på m . Vi antar för enkelhets skull att $D(m)$ och $D(k)$ är statistiskt oberoende för $m \neq k$. Med andra ord är $\{D(m)\}$ tidsdiskret vitt brus.

Antagandet att $\{D(m)\}$ är en vit process är realistiskt i högprestandasystem där källkodaren ser till att $D(m)$ och $D(k)$ är approximativt okorrelerade.²

Modulatern representerar den m :te biten, $D(m)$, med en puls med positiv amplitud om $D(m) = 1$ och negativ amplitud om $D(m) = -1$. Med andra ord är den sända signalen under tiden $mT \leq t < (m+1)T$

$$S(t) = \begin{cases} -A, & \text{om } D(m) = -1 \\ A, & \text{om } D(m) = 1 \end{cases}$$

Vi ser att $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ är en stokastisk process som är fullständigt bestämd av $\{D(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, se figur 4.

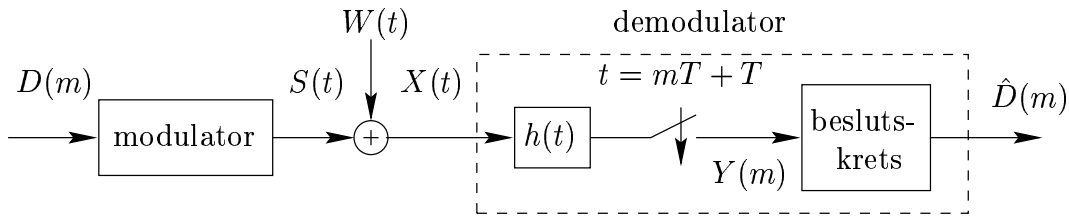


Figur 4: Exempel på en realisering av $\{D(m)\}$ och $\{S(t)\}$

Den sända signalen skickas över en brusig kanal enligt figur 5. Kanalbruset antas vara en svagt stationär vit gaussisk process $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ med (konstant) spektraltäthet $R_W(f) = N_0/2$ och väntevärdesfunktion $m_W(t) = 0$. Det är rimligt att anta att $\{W(t)\}$ och $\{S(t)\}$ är statistiskt oberoende när bruset skapas av fysikaliska processer i mottagarelektroniken och kanalen (mekanismer som inte beror på den sända informationen³). Den något underliga konventionen att beteckna

²Källkodaren utnyttjar korrelationen mellan sampel av källsignalen för att komprimera signalen, dvs., representera källsignalen med så få bitar per sekund som möjligt. Detta har som följd att sampel av utsignalen från källkodaren är approximativt okorrelerade.

³Det finns undantag till detta, t.ex. i kommunikationssystem som använder optiska fibrer. Brusprocessen varians beror här på den mottagna signalen.



Figur 5: Blockdiagram på vårt kommunikationssystem

spektraltätheten med $N_0/2$ istället för N_0 har historiska skäl och är mycket vanlig i litteraturen.

Vi noterar att vitt tidskontinuerligt brus i högsta grad är ofysikaliskt. Vitt tidskontinuerligt brus har nämligen oändlig effekt

$$r_W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} df = \infty$$

Vad vi egentligen menar med vitt kontinuerligt brus är att $\{W(t)\}$ har konstant spektraltäthet över bandbredden för vår mottagare. Att betrakta $\{W(t)\}$ som vitt brus är dock en god approximation och matematiskt praktiskt.

Eftersom kontinuerligt vitt brus är ofysikaliskt får vi vara försiktiga med dess kovariansfunktion. Genom att göra lite våld på fouriertransformen kan vi definiera $r_W(t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)$ där $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion. Diracs deltafunktion (som inte är en funktion i vanlig mening) har egenskapen $\delta(t) = 0$ för $t \neq 0$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

för alla tillräckligt väluppfostade funktioner $f(x)$.

Att definitionen $r_W(t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)$ ger rätt spektraltäthet är enkelt att kontrollera

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_W(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(t)e^{-i2\pi ft} dt = \frac{N_0}{2}e^{-i2\pi f0} = \frac{N_0}{2} = R_W(f)$$

Den mottagna processen, $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, är summan av den sända signalen och kanalbruset, $X(t) = S(t) + W(t)$. Mottagarens uppgift är nu att utgående från en realisering av $\{X(t)\}$ besluta vilken realiseringen av $\{D(m)\}$ som källan producerade. Vi betecknar beslutet med $\{\hat{D}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ och bitfelssannolikheten betecknas med

$$P_b = \mathbf{P}\{\hat{D}(m) \neq D(m)\}$$

I närvaron av brus, dvs. när $N_0/2 > 0$, kan vi aldrig garantera att alla bitar tas emot korrekt, dvs. $P_b > 0$.

Det kan visas att den optimala mottagaren, definierad som den mottagare som har den minsta möjliga felsannolikheten, bildar besluten som

$$\hat{D}(m) = \text{sgn}[Y(m)] = \begin{cases} -1, & \text{om } Y(m) \leq 0 \\ 1, & \text{om } Y(m) > 0 \end{cases}$$

där $Y(m)$ är sampel av utsignalen till ett linjärt filter.

Filtret, som kallas för ett signalanpassat filter, har impulssvar

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Uppgift 1

Visa att

$$Y(m) = X(t) * h(t)|_{t=mT+T} = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)h(t-u) du \Big|_{t=mT+T}$$

kan skrivas som

$$Y(m) = D(m)\sqrt{E} + N(m)$$

där $E = A^2T$ och $N(m)$ är definierad som

$$N(m) = \int_{mT}^{(m+1)T} W(u) \frac{1}{\sqrt{T}} du$$

■

Vi noterar att E är energin för den sända signalen under ett bitintervall, $0 \leq t < T$. Vi kallar därför E för energin per bit eller bitenergin.

Fel uppstår förstas då $\hat{D}(m) \neq D(m)$. Sannolikheten för den händelsen kallas för bitfelsannolikheten och betecknas med P_b . Vi är förstas mycket intresserade av att beräkna P_b . Det gör vi enklast med hjälp av betingade sannolikheter. Givet att händelsen $D(m) = -1$ har inträffat uppstår fel då

$$\hat{D}(m) = 1 \Leftrightarrow Y(m) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{E} + N(m) > 0 \Leftrightarrow N(m) > \sqrt{E}$$

Sannolikheten för bitfel, betingat på att $D(m) = -1$, är alltså

$$\begin{aligned} P_{b|-1} &= \mathbf{P}\{\hat{D}(m) = 1 \mid D(m) = -1\} \\ &= \mathbf{P}\{N(m) > \sqrt{E} \mid D(m) = -1\} \\ &= \mathbf{P}\{N(m) > \sqrt{E}\} \end{aligned}$$

Den sista likheten följer eftersom $N(m)$ är statistiskt oberoende av $D(m)$. På samma sätt kan vi beräkna sannolikheten för bitfel betingat på att $D(m) = 1$,

$$P_{b|1} = \mathbf{P}\{N(m) < -\sqrt{E}\}$$

Den totala felsannolikheten är

$$P_b = P_{b|-1}\mathbf{P}\{D(m) = -1\} + P_{b|1}\mathbf{P}\{D(m) = 1\} = P_{b|-1}p_{-1} + P_{b|1}p_1$$

Vi ser att fel uppstår om $N(m) > \sqrt{E}$ och $D(m) = -1$ eller då $N(m) < -\sqrt{E}$ och $D(m) = 1$. Om brusproffset $N(m)$ är "litet" jämfört med bitenergin är $Y(m) \approx \sqrt{E}D(m)$ och $Y(m)$ har samma tecken som $D(m)$. Om däremot bruset är i samma storleksordning som \sqrt{E} kan fel uppstå.

För att beräkna felsannolikheten måste man alltså ta reda på fördelningen för $N(m)$.

Uppgift 2

Vad är fördelningen för $N(m)$? Beräkna väntevärdessfunktionen och kovariansfunktionen för $\{N(m)\}$.

Ge ett uttryck för P_b som endast beror på kvoten E/N_0 .

■

4 Simulering av kommunikationssystem

För vissa enkla kommunikationssystem kan vi beräkna felsannolikheten exakt. En del system är dock så komplicerade att vi måste använda simuleringar för att skatta felsannolikheten.

Principen för att skatta P_b är enkel:

1. Skapa en realisering, $d(m)$ för $m = 1, 2, \dots, M$, av den sända bitströmmen $\{D(m)\}$.
2. Skapa en realisering, $n(m)$, av M sampel av brusprocessen $\{N(m)\}$.
3. Skapa en realisering av $\{Y(m)\}$ som $y(m) = d(m)\sqrt{E} + n(m)$
4. Skapa en realisering av $\{\hat{D}(m)\}$ som $\hat{d}(m) = \text{sgn}[y(m)]$.
5. Skapa en realisering av felindikatorprocessen $\{G(m)\}$ som

$$g(m) = |\hat{d}(m) - d(m)|/2 = \begin{cases} 1, & \text{då } \hat{d}(m) \neq d(m) \\ 0, & \text{då } \hat{d}(m) = d(m) \end{cases}$$

6. Uppskatta felsannolikheten som antalet bitfel genom antalet sända bitar

$$\hat{p}_b = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(m)$$

Vi misstänker att när M blir stort borde skattningen \hat{p}_b vara nära den riktiga felsannolikheten P_b . Varje gång vi upprepar ovanstående experiment får vi en ny skattning \hat{p}_b som beror på realiseringarna av $\{D(m)\}$ och $\{N(m)\}$. Vi kan alltså betrakta \hat{p}_b som ett utfall av en stokastisk variabel \hat{P}_b , given av

$$\hat{P}_b = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M G(m) ,$$

där den stokastiska variabeln $G(m)$ har frekvensfunktion

$$f_{G(m)}(g) = \mathbf{P}\{G(m) = g\} = \begin{cases} 1 - P_b, & g = 0 \\ P_b, & g = 1 \end{cases} .$$

Vi kommer att kalla \hat{p}_b för *skattningen* av p_b och \hat{P}_b för *skattaren*. Notera att \hat{p}_b är ett tal och \hat{P}_b är en stokastisk variabel.

Väntevärdet av skattaren är

$$\mathbf{E}\{\hat{P}_b\} = \mathbf{E}\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M G(m) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{E}\{G(m)\} = P_b$$

och skattaren är med andra ord väntevärdesriktig. I medeltal kan vi alltså förvänta oss att \hat{p}_b är lika med P_b . Det är förstås bra, men det säger inget om hur nära *en speciell skattning*, dvs. resultatet av *en* simulering, är P_b . För att säga något om detta vill vi beräkna variansen (eller standardavvikelsen) för \hat{P}_b . Det är tids- och pappersödande att göra detta exakt, men vi kan snabbt hitta en god approximation till variansen för \hat{P}_b med hjälp av centrala gränsvärdesatsen.

Vi vet att $G(m)$ beror på $D(m)$ och $N(m)$ och att $D(m), N(m), D(k), N(k)$ är statistiskt oberoende då $m \neq k$. Av detta följer att $G(m)$ och $G(k)$ är statistiskt oberoende för $m \neq k$. Följaktligen är \hat{P}_b är en skalad summa av M stycken oberoende likafördelade stokastiska variabler $G(m)$. Centrala gränsvärdesatsen säger då att \hat{P}_b är approximativt normalfördelad med väntevärde $\mathbf{E}\{\hat{P}_b\} = \mathbf{E}\{G(m)\} = P_b$ och varians $\mathbf{E}\{(\hat{P}_b - P_b)^2\} = \sigma^2/M$ där

$$\sigma^2 = \mathbf{E}\{(G(m) - P_b)^2\} = (0 - P_b)^2(1 - P_b) + (1 - P_b)^2P_b = P_b(1 - P_b)$$

Ett konfidensintervall för P_b med konfidensgrad $1 - \alpha$ är ett intervall $I_{P_b} = [l, u]$ sådant att

$$\mathbf{P}\{L \leq P_b \leq U\} \geq 1 - \alpha$$

där L och U är två stokastiska variabler som (i likhet med \hat{P}_b) beror på $G(m)$ för $m = 1, 2, \dots, M$. För en given realisering av $G(m)$ är utfallen av U och L talen l respektive u .

För att beräkna ett konfidensintervall för P_b börjar vi med att notera att

$$\frac{\hat{P}_b - P_b}{\sigma/\sqrt{M}}$$

är approximativt $N(0, 1)$ och

$$\mathbf{P} \left\{ -\Delta \leq \frac{\hat{P}_b - P_b}{\sigma/\sqrt{M}} \leq \Delta \right\} = 1 - 2Q(\Delta) \quad (1)$$

där

$$Q(x) = \mathbf{P}\{Z > x\} = 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt, \quad \text{där } Z \in N(0, 1) \quad (2)$$

Vi sätter $\alpha = 2Q(\Delta)$ och skriver om (1) enligt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbf{P} \left\{ -\Delta \leq \frac{\hat{P}_b - P_b}{\sigma/\sqrt{M}} \leq \Delta \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ -\Delta \leq \frac{\hat{P}_b - P_b}{\sqrt{(1 - P_b)P_b/M}} \leq \Delta \right\} \end{aligned}$$

och efter lite rutinalgebra kan vi skriva

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbf{P} \left\{ \frac{M}{M + \Delta^2} \left(\frac{\Delta^2}{2M} + \hat{P}_b - \Delta \sqrt{\frac{\hat{P}_b(1 - \hat{P}_b)}{M} + \frac{\Delta^2}{4M^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \leq P_b \leq \frac{M}{M + \Delta^2} \left(\frac{\Delta^2}{2M} + \hat{P}_b + \Delta \sqrt{\frac{\hat{P}_b(1 - \hat{P}_b)}{M} + \frac{\Delta^2}{4M^2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Konfidensintervallet med konfidensgrad $1 - \alpha$ är alltså

$$\begin{aligned} I_{P_b} &= \left[\frac{M}{M + \Delta^2} \left(\frac{\Delta^2}{2M} + \hat{p}_b - \Delta \sqrt{\frac{\hat{p}_b(1 - \hat{p}_b)}{M} + \frac{\Delta^2}{4M^2}} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{M}{M + \Delta^2} \left(\frac{\Delta^2}{2M} + \hat{p}_b + \Delta \sqrt{\frac{\hat{p}_b(1 - \hat{p}_b)}{M} + \frac{\Delta^2}{4M^2}} \right) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

Vi kan tolka (3) enligt följande. Antag att vi gör ett stort antal skattningar \hat{p}_b . Till varje skattning kan vi beräkna ett konfidensintervall enligt (3). Om konfidensintervallen har konfidensgrad $1 - \alpha = 0.95$ kan vi förvänta oss att P_b ligger i konfidensintervallet i cirka 95% av fallen.

5 Simulering av stokastiska processer i MATLAB

I MATLAB kan slumpstal dras från ett flertal olika fördelningar. Utfall av en $N(0, 1)$ stokastisk variabel returneras av funktionen `randn()`. Observera att funktionen `rand()` returnerar utfall från en stokastisk variabel som är rektangelfördelad mellan 0 och 1.

Genom att ge `randn()` lämpliga argument kan vi skapa en realisering av tidsdiskret vitt gaussiskt brus. Till exempel, för att skapa en realisering av längd M skriver vi

```
>> n = randn(M, 1);
```

För att skapa en realisering från en process med godtycklig varians skriver vi

```
>> n = a * randn(M, 1);
```

där a är ett lämpligt valt tal.

Vi kan också använda `randn()` för att skapa en realisering av bitarna. För att skapa en realisering av längd M skriver vi

```
>> d = sign(randn(M, 1));
```

där `sign()` är signumfunktionen.

För att få reda på hur en MATLAB-funktion fungerar använder vi kommandot `help`

```
>> help sign
```

SIGN Signum function.

For each element of X, SIGN(X) returns 1 if the element is greater than zero, 0 if it equals zero and -1 if it is less than zero. For complex X, SIGN(X) = X ./ ABS(X).

I MATLAB finns ett antal funktioner som relaterade till Q -funktionen i (2), nämligen `erf()`, `erfc()` och `erfinv()`. Funktionen `erfc()` beräknar

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\sqrt{2}}^{\infty} e^{-u^2/2} du = 2Q(x\sqrt{2}) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

Funktionen `erfinv()` beräknar inversen på $\operatorname{erf}(x)$, dvs. om $y = \operatorname{erf}(x)$ är returnerar `erfinv(y)` värdet x . Med hjälp av `erfinv()` kan vi bestämma Δ i (3).

6 Simuleringsuppgift

Genom lyssningstester har det kommit fram att P_b måste vara mindre än 10^{-3} för att distortionen inte skall upplevas alltför störande.

Vi kommer ihåg att källsignalen är en talsignal som är samplad med samlingsfrekvens 8 kHz och varje sampel är kvantiserad med 8 bitar. Med andra ord måste kommunikationssystemet ha datahastighet $8 \times 8 = 64$ kbit/s, vilket betyder att en bit skall skickas varje $T = 1/64 \times 10^3 \approx 15.6 \mu\text{s}$.

Uppgift 3

Beräkna den amplitud A som krävs för att $P_b < 10^{-3}$ då kanalbruset har effekttätheten $N_0/2 = 2 \times 10^{-8}$. ■

Uppgift 4

Skatta P_b genom att simulera systemet med det beräknade värdet på A . För att uppnå en viss grad av säkerhet skall skattningen skall ha ett konfidensintervall med konfidensgrad $1 - \alpha = 0.99$ som ligger inom intervallet $[0.5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}]$.

Redovisa skattningen \hat{P}_b , konfidensintervallet, samt antalet sända bitar i simuleringen M . ■

Det kan vara svårt att beräkna det minsta M som krävs för att konfidensintervallet skall precis passa in i intervallet $[0.5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}]$. Det är inte heller nödvändigt att utföra den beräkningen. Se bara till att M är tillräckligt stort, t.ex., genom att (i MATLAB) plotta gränserna hos konfidensintervallet (3) som funktion av M . Genom att sätta $\hat{p}_b = P_b = 10^{-3}$ är det enkelt att hitta ett lämpligt M .

Referenser

- [1] L. W. Couch. *Digital and Analog Communication Systems*. Prentice-Hall, 1997.
- [2] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, 1996.
- [3] A. van der Ziel. *Noise*. Prentice-Hall, 1954.

7 Svar

Uppgift 2

Brussamplet $N(m)$ är normalfördelat. Väntevärdessfunktionen för $\{N(m)\}$ är $m_N(m) = 0$ och kovariansfunktionen är

$$r_N(m, n) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & \text{för } n = m \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Felsannolikheten är

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

Funktionen $Q(x)$ är nära relaterad till fördelningsfunktionen $\Phi(x) = \mathbf{P}\{Z < x\}$, där $Z \in N(0, 1)$,

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$$

Uppgift 3

$$A = \sqrt{\frac{N_0}{2T}} Q^{-1}(P_b) \approx 0.111$$

där $Q^{-1}(x)$ är den inversa funktionen till $Q(x)$, dvs.

$$y = Q(x) \Rightarrow Q^{-1}(y) = x$$