

Några exempel på stokastiska processer

Poissonprocess

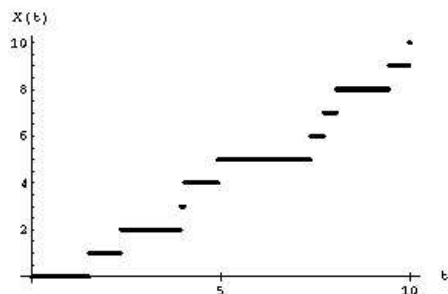
En *Poissonprocess* med intensitet $\lambda > 0$ är ett stokastiskt (dvs. ickedeterministiskt) tidsförlopp, en s.k. *stokastisk process*, definierat för tider $t \geq 0$, dvs. en familj av stokastiska variabler (s.v.) $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, så att

- $X(0) = 0$;
- $X(t_n) - X(t_{n-1}), \dots, X(t_2) - X(t_1)$ är oberoende s.v. för $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$;
- $X(t+s) - X(s)$ är $\text{Po}(\lambda t)$ -fördelad för $s, t \geq 0$.

Poissonprocesser användes bl.a. för att modellera trafikströmmar, t.ex. på vägar (antalet passerade fordon efter tiden t), eller i telekommunikationssystem (antalet inkomna kunder vid tiden t).

För att plotta ett exempel på en Poissonprocess $\{X(t)\}_{t \in [0,10]}$ med $\lambda = 1$, en s.k. *realisering* av processen, samplas $X(t)$ så att $\{X(\frac{k}{100})\}_{k=1}^{1000}$ plottas. Först lagras i vektorn *ökn* ökningarna $\{X(\frac{k}{100}) - X(\frac{k-1}{100})\}_{k=1}^{1000}$, som är oberoende $\text{Po}(0.01)$ -fördelade s.v. Sedan lagras i vektorn *X* värdena $X(\frac{k}{100}) = \sum_{j=1}^k (X(\frac{j}{100}) - X(\frac{j-1}{100}))$ för $k = 1, \dots, 1000$ [där ju $X(0) = 0$]. Nedan visas Mathematica-kod som utför detta och plottar resultatet.

```
In[1] := <<Statistics'DiscreteDistributions'
In[2] := ökn=N[Table[Random[PoissonDistribution[0.01]],{1000}]];
In[3] := X=Table[Sum[ökn[[i]],{i,1,k}],{k,1,1000}];
In[4] := ListPlot[X,Ticks->{{500,"5",0.02},{1000,"10",0.02}},
Automatic,AxisLabel->{"t","X(t)"]
```



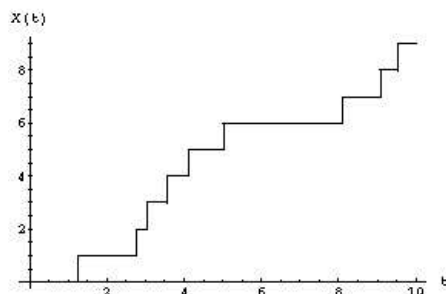
Låt ξ_1, ξ_2, \dots vara oberoende $\exp(\lambda)$ -fördelade s.v. Ekvivalent (visar det sig efter en del matematiskt bevisarbete) kan Poissonprocessen definieras

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq t < \xi_1 \\ 1 & \text{för } \xi_1 \leq t < \xi_1 + \xi_2 \\ 2 & \text{för } \xi_1 + \xi_2 \leq t < \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ & \vdots \end{cases}$$

dvs. $X(t)$ tar värdet 0 under en $\exp(\lambda)$ -fördelad tid ξ_1 , varefter värdet är 1 under en oberoende $\exp(\lambda)$ -fördelad tid ξ_2 , varefter värdet är 2 under en oberoende $\exp(\lambda)$ -fördelad tid ξ_3 , varefter

Om $\text{steg}(t)$ är stegfunktionen (0 för $t < 0$ och 1 för $t \geq 0$) så kan definitionen ovan skrivas $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{steg}(t - \text{hopp}_k)$ där $\text{hopp}_k = \sum_{j=1}^k \xi_j$. Detta betyder ju att det första (trapp-) steget placeras vid tiden ξ_1 , det andra ovanpå det första vid tiden $\xi_1 + \xi_2$, det tredje ovanpå det första och andra vid tiden $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, osv. Mathematica-koden nedan utför detta, och plottar sedan resultatet:

```
In[1] := <<Statistics`ContinuousDistributions`
In[2] := xi=N[Table[Random[ExponentialDistribution[1]],{50}]];
In[3] := hopp=Table[Sum[xi[[i]],{i,1,k}],{k,1,50}];
In[4] := steg[t_]:=If[t>=0,1,0]
In[5] := X[t_]:=Sum[steg[t-hopp[[k]]],{k,1,50}]
In[6] := Plot[X[t],{t,0,10},AxesLabel->{"t","X(t)"},
PlotPoints->100]
```



Hagelbrus

Låt $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion med $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$, och $\xi_1, \xi_2, \dots, \eta_1, \eta_2, \dots$ oberoende $\exp(\lambda)$ -fördelade s.v. *Hagelbrus* $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ är en stokastisk process definierad för tider $t \in \mathbb{R}$ genom

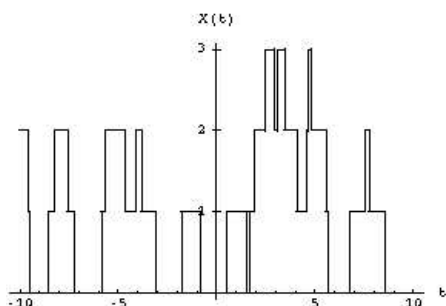
$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(t - \sum_{j=1}^k \xi_j) + \sum_{k=1}^{\infty} g(t + \sum_{j=1}^k \eta_j).$$

Om "signalpaket" med form $g(t)$ inkommer med oberoende $\exp(\lambda)$ -fördelade tidsmellanrum, så är den adderade mottagna signalen hagelbruset $X(t)$ ovan. (Jämför det andra sättet att generera en Poisson process ovan.)

Notera att $g(t - \sum_{j=1}^k \xi_j)$ är funktionen g translaterad sträckan $\sum_{j=1}^k \xi_j$ åt höger, $g(t + \sum_{j=1}^k \eta_j)$ funktionen g translaterad sträckan $\sum_{j=1}^k \eta_j$ åt vänster, och $X(t)$ summan av sådana translaterade av g .

Nedan plottas en realisering av hagelbrus då $\lambda = 1$ samt $g(t) = 1$ för $0 \leq t \leq 1$ och 0 för övrigt. (Om trafikströmmen på en bro ges av en Poissonprocess med intensitet 1, och varje fordon befinner sig på bron under en tidsenhet, så är antalet fordon på bron vid tiden t denna hagelbrusprocess.)

```
In[1] := <<Statistics'ContinuousDistributions'
In[2] := g[t_] := If[0 <= t <= 1, 1, 0]
In[3] := xi = N[Table[Random[ExponentialDistribution[1]], 50]];
          eta = N[Table[Random[ExponentialDistribution[1]], 50]];
In[5] := X[t_] := Sum[g[t - Sum[xi[[i]], {i, 1, k}]], {k, 1, 50}]
          + Sum[g[t + Sum[eta[[i]], {i, 1, k}]], {k, 1, 50}]
In[6] := Plot[X[t], t, -10, 10, AxesLabel -> {"t", "X(t)"}
          PlotPoints -> 150, Ticks -> {Automatic,
          {{1, "1", 0.02}, {2, "2", 0.02}, {3, "3", 0.02}}}]
```



Wienerprocess

En (standard) Wienerprocess $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ är en stokastisk process sådan att

- $W(0) = 0$;
- $W(t_n) - W(t_{n-1}), \dots, W(t_2) - W(t_1)$ är oberoende s.v. för $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$;
- $W(t+s) - W(s)$ är normal(0, t)-fördelad för $s, t \geq 0$.

Wienerprocessen är den viktigaste stokastiska processen. Ett skäl till detta är dess samband med kontinuerligt vitt brus indikerat nedan.

Wienerprocessen är kontinuerlig i varje tidpunkt, men ej deriverbar i någon enda. Realiseringen av en Wienerprocess nedan indikerar detta genom att den "uppför sig väl" i stort, "hänger ihop" etc., men "sedd i förstoringsglas" är processen oerhört irregulär, och alltså ej deriverbar någonstans.

I många tillämpningar utnyttjas Wienerprocessens derivata, fastän den ej existerar, som vitt brus i beräkningar. Man kan tänka sig att vad som egentligen avses, men har idealiserats i beräkningarna, är en approximativ derivata, dvs. en differenskvot, som t.ex. $W'(t) = (W(t + \frac{1}{100}) - W(t)) / (\frac{1}{100})$.

För att plotta en realisering av en Wienerprocess $\{W(t)\}_{t \in [0, 10]}$ samplas processen så att $\{W(\frac{k}{100})\}_{k=1}^{1000}$ plottas. Först lagras de oberoende $N(0, 0.01)$ -fördelade ökningarna $\{W(\frac{k}{100}) - W(\frac{k-1}{100})\}_{k=1}^{1000}$ i vektorn ökn. Sedan lagras $W(\frac{k}{100}) = \sum_{j=1}^k (W(\frac{j}{100}) - W(\frac{j-1}{100}))$ för $k = 1, \dots, 1000$ i vektorn W.

```
In[1] := <<Statistics'ContinuousDistributions'
In[2] := ökn=N[Table[Random[NormalDistribution[0,0.1]],{1000}]];
In[3] := W=Table[Sum[ökn[[i]],{i,1,k}],{k,1,1000}];
In[4] := ListPlot[W,PlotJoined->True,AxesLabel->{"t","W(t)"},
  Ticks->{{{500,"5",0.02},{1000,"10",0.02}},Automatic]
```



Vid approximativ derivering av Wienerprocessen blir resultatet likt ett "svart moln": Nedan plottas den approximativa derivatan $W'(t) = (W(t + \frac{1}{100}) - W(t)) / (\frac{1}{100})$ av Wienerprocessen $W(t)$ realiserad ovan.

```
In[5] := Wprim=Table[(W[[k+1]]-W[[k]])/(1/100),{k,1,999}];
In[6] := ListPlot[Wprim,PlotJoined->True,AxesLabel->{"t","W(t)"}
,Ticks->{{{500,"5",0.02},{1000,"10",0.02}},Automatic]
```



Stationaritet

Hagelbrus är en *stationär* stokastisk process, dvs. de slumpagar som styr processens beteende ändras ej med tiden, de saknar "drift". T.ex. har processvärdet $X(t)$ väntevärde $\mathbf{E}\{X(t)\} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds$ (visar det sig), oberoende av t .

Poissonprocessen är inte stationär. Dess värde vid tiden t är $Po(\lambda t)$ -fördelat, och motsvarande väntevärde λt växer med tiden t (se tidigare figurer).

Wienerprocessen $W(t)$ är inte heller stationär. Visserligen är $\mathbf{E}\{W(t)\} = 0$ för alla t , dvs. tidsberoende, men $\mathbf{Var}\{W(t)\} = t$ ökar med t [vilket framgår av det "strutformade" utseendet av realiseringen av $W(t)$ ovan].

Wienerprocessens derivata är stationär (hade varit det om den existerat), vilket indikeras av realiseringen av den approximativa derivatan $W'(t)$ ovan.

Matematiskt statistiskt definieras stationaritet som invarians under tidstranslation, dvs. den translaterade processen $X(t+h)$ lyder samma slumpplagar som $X(t)$ för varje konstant h . Stationaritet är ett viktigt begrepp. Som regel utnyttjas stationära processer som matematiska modeller för brus.

Beroende och kovariansfunktion

Allmänt säger en analog signals värde vid enstaka tidpunkter inget om dess informationsinnehåll. (Signalnivån i en radio vid enstaka tidpunkter säger inget om vad man lyssnar på.) Det intressanta är istället strukturen i signalens tidsberoende. Detta har relevans även i digitala sammanhang, eftersom digitala signaler ofta transmitteras kodade som analoga signaler.

Vanligen är en observerbar signal efter transmission ej identisk den sända signalen, utan någon slags "förvrängning" sker, t.ex. i form av additivt brus så att man observerar sänd signal plus brus. Bruset är ej observerbart, vilket ofta modelleras matematiskt genom antaga att det är stokastiskt.

I detta kompendium studeras stokastiska processer. Viktiga exempel på sådana är den observerbara signalen efter brusstörd transmission av en informationsbärande signal.

Strukturen i en stokastisk signals tidsberoende är viktig (se ovan). Ofta användes kovarians som ett mått på detta beroende. För en stokastisk signal $X(t)$ ger *kovariansfunktionen* $r_X(s, t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\}$ information om hur processvärden i olika tidpunkter beror av varandra. Om $X(t)$ är stationär beror $r_X(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\} =_{\text{translationsinvarians}} \mathbf{Cov}\{X(0), X(\tau)\}$ ej av t . Processer med denna egenskap kallas *svagt stationära*. Detta förenklade stationaritetsbegrepp är viktigt i tillämpningar.

Det går att filtrera den observerade signalen så att filtrets utsignalen bättre liknar den sända signalen. Till detta utnyttjas *spektralanalys*, baserad på frekvensinnehållet i kovariansstrukturen för signalen och bruset. Ett s.k. *Wienerfilter* släpper igenom frekvenser där signalen är stark jämfört med bruset, och spärrar andra frekvenser, på ett optimalt sätt.