Resultatsammanfattning TMA421 StokProcE LP2 HT 03

A GRUNDLÄGGANDE ANALYS

A.1 Funktioner, Integraler och Summor

Def. $f\!:\!C\to\mathbb{C}$ integrerbar (summerbar) om $\int_C |f(x)|\,dx<\infty$ $\ (\sum_{k\in C}|f(k)|<\infty)$.

Def. $N\subseteq\mathbb{R}^n$ nollmängd om $\int_N dx=0$.

Def. $r\!:\!T\to\mathbb{R}$ $\ (r\!:\!T{\times}T\to\mathbb{R})$ symmetrisk om $r(t)=r(-t)$ för $t\in T$ $\ (r(s,t)=r(t,s)$ för $s,t\in T)$.

Def. $r\!:\!T\to\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ positivt semidefinit över $\mathbb{R}$ (över $\mathbb{C}$) om $\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_k\overline{a_\ell}\,r(t_\ell-t_k)\geq 0$ för $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $t_1,\ldots,t_n\in T$.

Def. $r:T\times T\to\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ positivt semidefinit över $\mathbb{R}$ (över $\mathbb{C}$) om $\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_k\overline{a_\ell}\,r(t_k,t_\ell)\geq 0$ för $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $t_1,\ldots,t_n\in T$.

Def. Kroneckers δ-funktion $\mathbb{Z}\ni\tau\mapsto\delta(\tau)=\begin{cases}1 & \text{för } \tau=0\\ 0 & \text{för } \tau\neq 0\end{cases}$.

Def. Diracs δ-distribution $(f\!:\!\mathbb{R}\to\mathbb{C})\mapsto\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0)$ (ej funktion).

Def. Faltning $(f\star g)\!:\!\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ under lämpliga integrabilitetsvillkor för $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $(f\star g)(t)\equiv\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)\,dx=\int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)\,dx$ för $t\in\mathbb{R}$.

Def. Faltning $(f\star g)\!:\!\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ under lämpliga summabilitetsvillkor för $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ $(f\star g)(k)\equiv\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\ell)g(k-\ell)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(k-\ell)g(\ell)$ för $k\in\mathbb{Z}$.

SATS $f,g\!:\!\mathbb{R}\,(\mathbb{Z})\to\mathbb{C}$ integrerbara (summerbara) $\Rightarrow$ $f\star g$ integrerbar (summerbar).

A.2 Fourier Transformer

A.2.1 Kontinuerlig Fourier Transform

Def. Fouriertransform $\mathfrak{F}f\!:\!\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ av integrerbar funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ $(\mathfrak{F}f)(t)\equiv\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i2\pi(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}f(x)\,dx$ för $t\in\mathbb{R}^n$.

Def. Inverstransform $\mathfrak{F}^{-1}f\!:\!\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ av integrerbar funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ $(\mathfrak{F}^{-1}f)(t)\equiv\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i2\pi(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}f(x)\,dx$ för $t\in\mathbb{R}^n$.

SATS (Inversionsformeln) $\mathfrak{F}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ integrerbar $\Rightarrow$ $(\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f))(x)=f(x)$ (förutom på nollmängd).

Räkneregler. För integrerbar $f\!:\!\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ gäller

- $(\mathfrak{F}^{-1}f)(t)=(\mathfrak{F}f(-\cdot))(t)=(\mathfrak{F}f)(-t)=(\overline{\mathfrak{F}\overline{f}})(t)$,
- $(\mathfrak{F}f(a\cdot+b))(t)=\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-i2\pi bt/a}\,(\mathfrak{F}f)(t/a)$ för $a>0$, $b\in\mathbb{R}$,
- $(\mathfrak{F}(\mathrm{e}^{i2\pi s\cdot}f))(t)=(\mathfrak{F}f)(t+s)$ för $s\in\mathbb{R}$,
- $(\mathfrak{F}f')(t)=(-i2\pi t)\,(\mathfrak{F}f)(t)$ om $f'\!:\!\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integrerbar,
- $(\mathfrak{F}((\cdot)f(\cdot)))(t)=\frac{1}{i2\pi}\,(\mathfrak{F}f)'(t)$ om $\mathbb{R}\ni x\mapsto xf(x)\in\mathbb{C}$ integrerbar,

∘ $(\mathfrak{F}(f\star g))(t) = (\mathfrak{F}f)(t)\,(\mathfrak{F}g)(t)$ om $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integrerbar.

A.2.2 Diskret Fourier Transform

Def. Fouriertransform $\mathfrak{F}f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ av integrerbar $f:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{C}$ $(\mathfrak{F}f)(k) \equiv \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi kx} f(x)\,dx$ för $k\in\mathbb{Z}$.

Def. Inverstransform $\mathfrak{F}^{-1}f:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{C}$ av summerbar $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ $(\mathfrak{F}^{-1}f)(x) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi xk} f(k)$ för $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

SATS (Inversionsformeln) $\mathfrak{F}f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ summerbar $\Rightarrow$ $(\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f))(x) = f(x)$ (förutom på nollmängd). $\mathfrak{F}^{-1}f:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{C}$ integrerbar $\Rightarrow$ $(\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}f))(k) = f(k)$.

Räkneregler. För integrerbar $f:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{C}$ och summerbar $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ gäller

∘ $(\mathfrak{F}f(-\cdot))(k) = (\mathfrak{F}f)(-k) = \overline{(\mathfrak{F}\overline{f})(k)}$ och $(\mathfrak{F}^{-1}g(-\cdot))(x) = (\mathfrak{F}^{-1}g)(-x) = \overline{(\mathfrak{F}^{-1}\overline{g})(x)}$,

∘ $(\mathfrak{F}^{-1}g(\cdot+\ell))(x) = \mathrm{e}^{i2\pi x\ell}(\mathfrak{F}^{-1}g)(x)$ för $\ell\in\mathbb{Z}$,

∘ $(\mathfrak{F}(\mathrm{e}^{i2\pi\ell\cdot}f))(k) = (\mathfrak{F}f)(k+\ell)$ och $(\mathfrak{F}^{-1}(\mathrm{e}^{i2\pi y\cdot}g))(x) = (\mathfrak{F}^{-1}f)(x-y)$ för $\ell\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{R}$,

∘ $(\mathfrak{F}^{-1}(g\star h))(x) = (\mathfrak{F}^{-1}g)(x)\,(\mathfrak{F}^{-1}h)(x)$ om $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ summerbar.

B GRUNDLÄGGANDE SANNOLIKHETSTEORI

B.1 Utfallsrum, Händelser och Sannolikhetsmått

Def. Utfallsrummet Ω är mängden av möjliga utfall ω för slumpförsök.

Def. Händelser är delmängder av Ω. Händelsen $A\subseteq\Omega$ inträffar om utfallet $\omega\in A$.

Def. Sannolikhetsmått är funktion $\Omega\supseteq A\mapsto \mathbf{P}\{A\}\in[0,1]$ med $\mathbf{P}\{\emptyset\}=0$ och $\mathbf{P}\{A\cup B\} = \mathbf{P}\{A\}+\mathbf{P}\{B\}-\mathbf{P}\{A\cap B\}$.

SATS $\mathbf{P}\{B\backslash A\} = \mathbf{P}\{B\}-\mathbf{P}\{A\}$ för $A\subseteq B$, och speciellt $\mathbf{P}\{A^c\} = 1-\mathbf{P}\{A\}$.

SATS (Total Sannolikhet) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ och $A_i\cap A_j=\emptyset$ för $i\neq j$ $\Rightarrow$ $\mathbf{P}\{B\} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\{B\cap A_i\}$.

B.2 Stokastisk variabel, Fördelningsfunktion och Frekvensfunktion

Def. Stokastisk variabel / s.v. är funktion $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^n$.

Def. Fördelningsfunktion $F_\xi(x) \equiv \mathbf{P}\{\xi_1\leq x_1,\ldots,\xi_n\leq x_n\}$ för $x\in\mathbb{R}^n$.

Def. ξ diskret om mängden av möjliga värden $\Omega_\xi\subseteq\mathbb{R}^n$ för ξ diskret (uppräknelig). Frekvensfunktion $f_\xi(x)\equiv\mathbf{P}\{\xi=x\}$ för $x\in\Omega_\xi$.

SATS $f:\Omega_\xi\to\mathbb{R}$ frekvensfunktion för diskret s.v. med möjliga värden Ω_ξ $\Leftrightarrow$ $f(x)\geq 0$ för $x\in\Omega_\xi$ och $\sum_{x\in\Omega_\xi} f(x) = 1$.

Def. ξ kontinuerlig om $\frac{\partial^n F_\xi(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}$ existerar för $x\in\mathbb{R}^n$ (förutom på nollmängd) och $F_\xi(z) = \int_{y_1\leq z_1,\ldots,y_n\leq z_n} \frac{\partial^n F_\xi(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}\Big|_{x=y}\,dy$ för $z\in\mathbb{R}^n$. Frekvensfunktion $f_\xi(x) \equiv \frac{\partial^n F_\xi(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}$.

SATS $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ frekvensfunktion för kontinuerlig s.v. $\Leftrightarrow$ $f(x)\geq 0$ för $x\in\mathbb{R}^n$ (förutom på nollmängd) och $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$.

SATS $\mathbf{P}\{\xi\in C\} = \begin{cases} \sum_{x\in C\cap\Omega_\xi} f_\xi(x) & \text{om } \xi \text{ diskret} \\ \int_C f_\xi(x)\,dx & \text{om } \xi \text{ kontinuerlig} \end{cases}$ för $C\subseteq\mathbb{R}^n$.

SATS $f_\xi(x) = \begin{cases} \sum_{y\in\Omega_\eta} f_{\xi,\eta}(x,y) & \text{om } \eta \text{ diskret } \mathbb{R}^m\text{-värd s.v.} \\ \int_{\mathbb{R}^m} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy & \text{om } \eta \text{ kontinuerlig } \mathbb{R}^m\text{-värd s.v.} \end{cases}$.

Def. $\xi =_{\text{fördelning}} \eta$ om $F_\xi(x) = F_\eta(x)$ för $x\in\mathbb{R}^n$.

Def. ξ symmetrisk om $\xi =_{\text{fördelning}} -\xi$.

B.3 Oberoende och Betingad Sannolikhet

Def. Händelser A och B oberoende om $\mathbf{P}\{A\cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\,\mathbf{P}\{B\}$.

Def. Betingad sannolikhet $\mathbf{P}\{A|B\} \equiv \mathbf{P}\{A\cap B\}/\mathbf{P}\{B\}$ då $\mathbf{P}\{B\}\neq 0$.

SATS A och B oberoende $\Rightarrow$ $\mathbf{P}\{A|B\} = \mathbf{P}\{A\}$ då $\mathbf{P}\{B\}\neq 0$.

Def. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ oberoende om $\mathbf{P}\{\bigcap_{i=1}^n\{\xi_i\in C_i\}\} = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{\xi_i\in C_i\}$ för alla $C_1,\ldots,C_n$.

SATS $\xi_1,\ldots,\xi_n$ oberoende $\Rightarrow$ $g_1(\xi_1),\ldots,g_n(\xi_n)$ oberoende för funktioner $g_1,\ldots,g_n$.

SATS $\xi_1,\ldots,\xi_n$ oberoende $\Leftrightarrow$ $f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{\xi_n}(x_n)$ för $x\in\mathbb{R}^n$ (förutom på nollmängd) .

Def. Betingad frekvensfunktion $f_{\xi|\eta}(x\,|\,y) \equiv \begin{cases} f_{\xi,\eta}(x,y)/f_\eta(y) & \text{om } f_\eta(y)\neq 0 \\ 0 & \text{om } f_\eta(y)=0 \end{cases}$.

SATS ξ och η oberoende $\Rightarrow$ $f_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = f_\xi(x)$ (om $f_\eta(y)\neq 0$).

Def. Betingad sannolikhet $\mathbf{P}\{\xi\in C\,|\,\eta=y\} \equiv \begin{cases} \sum_{x\in C\cap\Omega_\xi} f_{\xi|\eta}(x\,|\,y) & \text{om } \xi \text{ diskret} \\ \int_C f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)\,dx & \text{om } \xi \text{ kontinuerlig} \end{cases}$.

SATS ξ och η oberoende $\Rightarrow$ $\mathbf{P}\{\xi\in C\,|\,\eta=y\} = \mathbf{P}\{\xi\in C\}$ (om $f_\eta(y)\neq 0$).

SATS $\mathbf{P}\{\xi\in C\} = \begin{cases} \sum_{y\in\Omega_\eta} \mathbf{P}\{\xi\in C\,|\,\eta=y\} f_\eta(y) & \text{om } \eta \text{ diskret} \\ \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{P}\{\xi\in C\,|\,\eta=y\} f_\eta(y)\,dy & \text{om } \eta \text{ kontinuerlig} \end{cases}$.

B.4 Väntevärde, Varians och Kovarians

Def. Väntevärde $\mathbf{E}\{\xi\} \equiv \begin{cases} \sum_{x\in\Omega_\xi} x\,f_\xi(x) & \text{om } \xi \text{ diskret } \mathbb{R}\text{-värd s.v.} \\ \int_{\mathbb{R}} x\,f_\xi(x)\,dx & \text{om } \xi \text{ kontinuerlig } \mathbb{R}\text{-värd s.v.} \end{cases}$.

SATS $\mathbf{E}\{g(\xi)\} = \begin{cases} \sum_{x\in\Omega_\xi} g(x) f_\xi(x) & \text{om } \xi \text{ diskret} \\ \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_\xi(x)\,dx & \text{om } \xi \text{ kontinuerlig} \end{cases}$ för funktion $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Def. Betingat väntevärde $\mathbf{E}\{\xi\,|\,\eta=y\} \equiv \begin{cases} \sum_{x\in\Omega_\xi} x\,f_{\xi|\eta}(x\,|\,y) & \text{om } \xi \text{ diskret} \\ \int_{\mathbb{R}} x\,f_{\xi|\eta}(x\,|\,y)\,dx & \text{om } \xi \text{ kontinuerlig} \end{cases}$.

SATS $\mathbf{E}\{g(\xi)\} = \begin{cases} \sum_{y\in\Omega_\eta} \mathbf{E}\{g(\xi)\,|\,\eta{=}y\} f_\eta(y) & \text{om } \eta \text{ diskret} \\ \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{E}\{g(\xi)\,|\,\eta{=}y\} f_\eta(y)\,dy & \text{om } \eta \text{ kontinuerlig} \end{cases}.$

Def. <u>Väntevärde</u> för $\mathbb{R}^n$-värd s.v. $\underline{\mathbf{E}\{\xi\}} \equiv (\mathbf{E}\{\xi_1\},\ldots,\mathbf{E}\{\xi_n\}) = (\mathbf{E}\{\xi_1\}\ \ldots\ \mathbf{E}\{\xi_n\})^T$.

SATS $\mathbf{E}\{(a_1 \ldots a_n)(\xi_1 \ldots \xi_n)^T\} = \mathbf{E}\{\sum_{k=1}^n a_k\xi_k\} = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{E}\{\xi_k\} = (a_1 \ldots a_n)\,\mathbf{E}\{\xi\}$.

Def. <u>Kovarians</u> mellan $\mathbb{R}$-värda s.v. $\underline{\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}} \equiv \mathbf{E}\Big\{(\xi-\mathbf{E}\{\xi\})\,(\eta-\mathbf{E}\{\eta\})\Big\}$.

Def. <u>Varians</u> för $\mathbb{R}$-värd s.v. $\underline{\mathbf{Var}\{\xi\}} \equiv \mathbf{Cov}\{\xi,\xi\}$.

Def. <u>Standardavvikelse</u> för $\mathbb{R}$-värd s.v. $\underline{\sigma(\xi)} \equiv \sqrt{\mathbf{Var}\{\xi\}}$.

SATS (TJEBYSJEV) $\mathbf{P}\{|\xi|>x\} \le \mathbf{E}\{\xi^2\}/x^2$ för $x>0$.

SATS $\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\} = \mathbf{E}\{\xi\eta\} - \mathbf{E}\{\xi\}\,\mathbf{E}\{\eta\}$, och speciellt $\mathbf{Var}\{\xi\} = \mathbf{E}\{\xi^2\} - (\mathbf{E}\{\xi\})^2$.

SATS (CAUCHY-SCHWARZ) $|\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}| \le \sqrt{\mathbf{Var}\{\xi\}\,\mathbf{Var}\{\eta\}}$.

SATS $\mathbf{Cov}\{\sum_{k=1}^n a_k\xi_k, \sum_{\ell=1}^m b_\ell\eta_\ell\} = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^m a_k b_\ell\,\mathbf{Cov}\{\xi_k,\eta_\ell\}$ för $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m\in\mathbb{R}$, och speciellt $\mathbf{Var}\{\sum_{k=1}^n a_k\xi_k\} = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_k a_\ell\,\mathbf{Cov}\{\xi_k,\xi_\ell\}$.

Def. S.v. ξ och η <u>okorrelerade</u> om $\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\} = 0$.

SATS ξ och η oberoende $\Rightarrow$ ξ och η okorrelerade (om $\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}$ väldefinierad).

Def. <u>Varians</u> för $\mathbb{R}^n$-värd s.v. $\underline{\mathbf{Var}\{\xi\}} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{Cov}\{\xi_1,\xi_1\} & \ldots & \mathbf{Cov}\{\xi_1,\xi_n\} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Cov}\{\xi_n,\xi_1\} & \ldots & \mathbf{Cov}\{\xi_n,\xi_n\} \end{pmatrix}$.

SATS $n|n$-matris $\mathbf{V}$ variansmatris $\Leftrightarrow$ $\mathbf{V}$ symmetrisk och positivt semidefinit.

SATS A matris $\Rightarrow$ $\mathbf{Var}\{A\xi\} = A\,\mathbf{Var}\{\xi\}\,A^T$.

B.5 Karakteristiska Funktioner

Def. <u>Karakteristisk funktion</u> $\underline{\phi_\xi(t)} \equiv \mathbf{E}\{e^{i2\pi(t_1\xi_1+\ldots+t_n\xi_n)}\}$ för $t\in\mathbb{R}^n$.

SATS (BOCHNER) $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ karakteristisk funktion för $\mathbb{R}$-värd s.v. $\Leftrightarrow$ $\phi(t)$ kontinuerlig och positivt semidefinit över $\mathbb{C}$ med $\phi(0)=1$.

SATS $\mathbf{E}\{\xi_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{k_n}\} = (i2\pi)^{-(k_1+\ldots+k_n)}\,\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}\phi_\xi(t)}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_n^{k_n}}\,|_{t=0}$ (om båda väldefinierade).

SATS ξ kontinuerlig $\Rightarrow$ $\phi_\xi(t) = (\mathfrak{F}f_\xi)(t)$.

SATS $\phi_\xi(t)$ integrerbar $\Rightarrow$ ξ kontinuerlig med $f_\xi(x) = (\mathfrak{F}^{-1}\phi_\xi)(x)$ för $x\in\mathbb{R}^n$ (förutom på nollmängd).

SATS $\xi =_{\text{fördelning}} \eta$ $\Leftrightarrow$ $\phi_\xi(t) = \phi_\eta(t)$ för $t\in\mathbb{R}^n$.

SATS $\xi_1,\ldots,\xi_n$ oberoende $\Leftrightarrow$ $\phi_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(t_1,\ldots,t_n) = \phi_{\xi_1}(t_1)\cdot\ldots\cdot\phi_{\xi_n}(t_n)$ för $t\in\mathbb{R}^n$.

SATS $\xi_1,\ldots,\xi_n$ oberoende $\Rightarrow$ $\phi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \phi_{\xi_1}(t)\cdot\ldots\cdot\phi_{\xi_n}(t)$.

B.6 Några Diskreta Fördelningar

B.6.1 Poissonfördelning

Def. $\xi \sim \underline{\mathrm{Po}(\lambda)}$ om $f_\xi(k) = \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/(k!)$ för $k \in \Omega_\xi = \{0,1,2,\ldots\}$.

SATS $\mathbf{E}\{\mathrm{Po}(\lambda)\} = \mathbf{Var}\{\mathrm{Po}(\lambda)\} = \lambda$ och $\phi_{\mathrm{Po}(\lambda)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{i2\pi t}-1)}$.

SATS $\xi_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1), \ldots, \xi_n \sim \mathrm{Po}(\lambda_n)$ oberoende $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^n \xi_k \sim \mathrm{Po}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$.

B.6.2 Binomialfördelning

Def. $\xi \sim \underline{\mathrm{Bin}(n,p)}$ om $f_\xi(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ för $k \in \Omega_\xi = \{0,\ldots,n\}$ $(q = 1-p)$.

SATS $\mathbf{E}\{\mathrm{Bin}(n,p)\} = np$, $\mathbf{Var}\{\mathrm{Bin}(n,p)\} = npq$ och $\phi_{\mathrm{Bin}(n,p)}(t) = (q + p\mathrm{e}^{i2\pi t})^n$.

SATS $\xi_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1,p), \ldots, \xi_m \sim \mathrm{Bin}(n_m,p)$ oberoende $\Rightarrow \sum_{k=1}^m \xi_k \sim \mathrm{Bin}(\sum_{k=1}^m n_k, p)$.

B.7 Några Kontinuerliga Fördelningar

B.7.1 Likformig Fördelning

Def. $\xi \sim \underline{\mathrm{likf}[a,b]}$ om $f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}$ för $x \in [a,b]$ $(f_\xi(x) = 0$ för övrigt$)$.

SATS $\mathbf{E}\{\mathrm{likf}[a,b]\} = \frac{b+a}{2}$, $\mathbf{Var}\{\mathrm{likf}[a,b]\} = \frac{(b-a)^2}{12}$ och $F_{\mathrm{likf}[a,b]}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ för $x \in [a,b]$.

B.7.2 Endimensionell Normalfördelning

Def. $\xi \sim \underline{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}$ om $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ för $x \in \mathbb{R}$.

Def. $\underline{\varphi(x)} = f_{\mathrm{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ och $\underline{\Phi(x)} = F_{\mathrm{N}(0,1)}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y)\, dy$.

SATS $(\mathrm{N}(\mu,\sigma^2) - \mu)/\sigma \sim \mathrm{N}(0,1)$, $\sigma \mathrm{N}(0,1) + \mu \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ och $F_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

SATS $\mathbf{E}\{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\} = \mu$, $\mathbf{Var}\{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\} = \sigma^2$ och $\phi_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(t) = \mathrm{e}^{i2\pi\mu t - \frac{1}{2}(2\pi\sigma t)^2}$.

SATS $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ oberoende N-fördelade $\Rightarrow \sum_{k=1}^n \xi_k \sim \mathrm{N}(\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{\xi_k\}, \sum_{k=1}^n \mathbf{Var}\{\xi_k\})$.

SATS (CGS.) $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ oberoende med $\mathbf{E}\{\xi_k\} = \mu_k$ och $\mathbf{Var}\{\xi_k\} = \sigma_k^2$ $(= \sigma^2)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{P}\{\sum_{k=1}^n \xi_k \leq x\} \approx \mathbf{P}\{\mathrm{N}(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2) \leq x\}$ för n stort och $x \in \mathbb{R}$ (ej för stort).

B.7.3 Flerdimensionell Normalfördelning

Def. $\mathbb{R}^n$-värd s.v. ξ <u>N-fördelad</u> om $\sum_{k=1}^n a_k \xi_k$ N-fördelad för $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

SATS ξ N-fördelad $\Rightarrow$ $\phi_\xi(t) = \mathrm{e}^{i2\pi t^T \mathbf{E}\{\xi\} - \frac{1}{2}(2\pi)^2 t^T \mathbf{Var}\{\xi\} t}$. ξ N-fördelad med $\det(\mathbf{Var}\{\xi\}) \neq 0$ $\Rightarrow$ $f_\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{Var}\{\xi\})}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x - \mathbf{E}\{\xi\})^T (\mathbf{Var}\{\xi\})^{-1}(x - \mathbf{E}\{\xi\})}$.

SATS N-fördelning bestämd av dess varians och väntevärde. Till varje n-dimensionell varians och väntevärde finns N-fördelad s.v. med sådan varians och väntevärde.

SATS För $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ N-fördelad är $\xi_1, \ldots, \xi_n$ oberoende $\Leftrightarrow$ okorrelerade.

SATS ξ $\mathbb{R}^2$-värd N-fördelad med $\mathbf{E}\{\xi\} = \binom{\mu_1}{\mu_2}$ och $\mathbf{Var}\{\xi\} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2/\sigma_1^2 - 2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)/(\sigma_1\sigma_2) + (x_2-\mu_2)^2/\sigma_2^2}{2\,(1-\rho^2)}\Big\}.$$

B.7.4 Exponentialfördelning

Def. $\xi \sim$ exp(λ) om $f_\xi(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ för $x \geq 0$ ($f_\xi(x) = 0$ för övrigt).

SATS $\mathbf{E}\{\exp(\lambda)\} = \lambda^{-1}$, $\mathbf{Var}\{\exp(\lambda)\} = \lambda^{-2}$, $F_{\exp(\lambda)}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ för $x \geq 0$ och $\phi_{\exp(\lambda)}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - i2\pi t}$.

SATS (Minneslöshet) $\xi \sim \exp(\lambda) \Rightarrow \mathbf{P}\{\xi > x+y \,|\, \xi > x\} = \mathbf{P}\{\xi > y\}$ för $x, y \geq 0$.

C STOKASTISKA PROCESSER

C.1 Stokastiska Processer

Def. Stokastisk process med parametermängd T $\{X(t)\}_{t\in T}$ funktion $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$.

Def. $\{X(t)\}_{t\in T}$ har kontinuerlig tid om $T = \mathbb{R}$ eller $T = \mathbb{R}^+$ (eller liknande).

Def. $\{X(t)\}_{t\in T}$ har diskret tid om $T = \mathbb{Z}$ eller $T = \mathbb{N}$ (eller liknande).

Def. Givet $\omega_0 \in \Omega$ är funktionen $T \ni t \mapsto X(\omega_0, t) \in \mathbb{R}$ en realisering av $\{X(t)\}_{t\in T}$.

Def. Ändligtdimensionella fördelningar / ädf. $F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n\}$ för $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$.

SATS Ädf. bestämmer sannolikheten för (de flesta) händelser för (separabel) process.

C.2 Lévy Processer

C.2.1 Lévy Processer

Def. $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ har oberoende ökningar om $X(t_n) - X(t_{n-1}), \ldots, X(t_1) - X(t_0)$ är oberoende för $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Def. $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ har stationära ökningar om $X(t+h) - X(h) =_{\text{fördelning}} X(t) - X(0)$ för $t, h \geq 0$ (egentligen om $\{X(t+h) - X(h)\}_{t\geq 0} =_{\text{ädf.}} \{X(t) - X(0)\}_{t\geq 0}$ för $h \geq 0$).

Def. Lévy process är process med oberoende och stationära ökningar.

SATS $X(t)$ Lévy process med $X(0) = 0 \Rightarrow m_X(t) = m_X(1)\, t$, $t \geq 0$, och $r_X(s,t) = V_X(1) \min\{s,t\}$, $s, t \geq 0$, (om väldefinierade).

C.2.2 Poisson Processen

Def. Poisson process $Y(t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq t < \xi_1 \\ 1 & \text{för } \xi_1 \leq t < \xi_1 + \xi_2 \\ & \vdots \end{cases}$ där $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty \sim \exp(\lambda)$ oberoende.

SATS Poisson process är Lévy process med $Y(0) = 0$ och $Y(t+h) - Y(h) \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$.

C.3 Stationära och Självsimilära Processer

Def. $\{X(t)\}_{t\in T}$ stationär om $\{X(t+h)\}_{t\in T} =_{\text{ädf.}} \{X(t)\}_{t\in T}$ för alla h.

Def. $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ självsimilär med index $\kappa>0$ om $\{X(\lambda t)\}_{t\geq 0} =_{\text{ädf.}} \{\lambda^{\kappa} X(t)\}_{t\geq 0}$ för $\lambda>0$.

SATS (Lamperti) $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ självsimilär med index $\kappa>0 \Leftrightarrow \{\mathrm{e}^{-\kappa\alpha t} X(\mathrm{e}^{\alpha t})\}_{t\in\mathbb{R}}$ stationär för $\alpha>0$.

D MOMENTFUNKTIONER

D.1 Momentfunktioner

Def. Väntevärdesfunktionen / vvf. $m_X(t) \equiv \mathbf{E}\{X(t)\}$.

Def. Variansfunktionen / vf. $V_X(t) \equiv \mathbf{Var}\{X(t)\}$.

Def. Kovariansfunktionen / kvf. $r_X(s,t) \equiv \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\}$.

Def. Andramomentfunktionen / amf. $R_X(s,t) \equiv \mathbf{E}\{X(s)X(t)\}$. Effekt / medeleffekt $R_X(t,t) = \mathbf{E}\{X(t)^2\}$.

Def. Korrelationsfunktionen / krf. $\rho_X(s,t) \equiv \frac{\mathbf{Cov}\{X(s),X(t)\}}{\sqrt{\mathbf{Var}\{X(s)\}\,\mathbf{Var}\{X(t)\}}}$.

Def. Korskovariansfunktionen / korskvf. $r_{X,Y}(s,t) \equiv \mathbf{Cov}\{X(s), Y(t)\}$.

Def. Korsandramomentfunktionen / korsamf. $R_{X,Y}(s,t) \equiv \mathbf{E}\{X(s)Y(t)\}$.

D.2 Egenskaper för Momentfunktioner

SATS $r_X(t,t) = V_X(t)$, $R_X(s,t) = r_X(s,t) + m_X(s)m_X(t)$ och $\rho_X(t,t) = 1$.

SATS $|r_X(s,t)| \leq \frac{1}{2}(V_X(s)+V_X(t))$ med likhet $\Leftrightarrow$ $X(s)\pm X(t) = \text{konstant}$.

SATS $|R_X(s,t)| \leq \frac{1}{2}(\mathbf{E}\{X(s)^2\}+\mathbf{E}\{X(t)^2\})$ med likhet $\Leftrightarrow$ $X(s)\pm X(t) = \text{konstant}$.

SATS $|\rho_X(s,t)| \leq 1$ med likhet $\Leftrightarrow$ $X(s) = \text{konstant}_1 \cdot X(t) + \text{konstant}_2$.

SATS (Cauchy-Schwarz) $|r_X(s,t)| \leq \sqrt{V_X(s)\,V_X(t)}$ med likhet $\Leftrightarrow$ $X(s) = \text{konstant}_1 \cdot X(t) + \text{konstant}_2$.

SATS $r: T\times T \to \mathbb{R}$ kvf. (amf.) för någon process $\{X(t)\}_{t\in T}$ $\Leftrightarrow$ $r(s,t)$ symmetrisk och positivt semidefinit över $\mathbb{R}$.

E KONVERGENS AV S.V.

E.1 Konvergens i Kvadratiskt Medel

Def. $\xi_k \to \xi$ då $k\to\infty$ / $\text{l.i.m.}_{k\to\infty}\xi_k = \xi$ om $\mathbf{E}\{\xi^2\}<\infty$ och $\mathbf{E}\{(\xi_k-\xi)^2\} \to 0$.

SATS $\xi_k \to \xi$ och $\eta_\ell \to \eta$ $\Rightarrow$ $\mathbf{E}\{\xi_k\} \to \mathbf{E}\{\xi\}$, $\mathbf{Var}\{\xi_k\} \to \mathbf{Var}\{\xi\}$, $\mathbf{E}\{\xi_k^2\} \to \mathbf{E}\{\xi^2\}$, $\mathbf{E}\{\xi_k\eta_\ell\} \to \mathbf{E}\{\xi\eta\}$ och $\mathbf{Cov}\{\xi_k,\eta_\ell\} \to \mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}$.

SATS (CAUCHY) $\text{l.i.m.}_{k\to\infty}\xi_k$ existerar $\Leftrightarrow$ $\lim_{k,\ell\to\infty}\mathbf{E}\{(\xi_k-\xi_\ell)^2\}=0$ och $\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\{\xi_k^2\}<\infty$.

SATS (LOÉVE) $\text{l.i.m.}_{k\to\infty}\xi_k$ existerar $\Leftrightarrow$ $\lim_{k,\ell\to\infty}\mathbf{E}\{\xi_k\xi_\ell\}$ existerar (ändligt).

E.2 Summor

SATS $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}\mathbf{E}\{\xi_k\xi_\ell\}$ existerar (ändligt).

SATS $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$, $\sum_{\ell=1}^{\infty}\eta_\ell$ konvergenta $\Rightarrow$ $\mathbf{E}\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\xi_k\}$, $\mathbf{Var}\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{Cov}\{\xi_k,\xi_\ell\}$, $\mathbf{E}\{(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k)^2\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\xi_k\xi_\ell\}$, $\mathbf{Cov}\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k,\sum_{\ell=1}^{\infty}\eta_\ell\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{Cov}\{\xi_k,\eta_\ell\}$ och $\mathbf{E}\{(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k)(\sum_{\ell=1}^{\infty}\eta_\ell)\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\xi_k\eta_\ell\}$.

E.3 Kontinuitet och Derivata

Def. <u>$X(t)$ kontinuerlig i $t=t_0$</u> om $\text{l.i.m.}_{t\to t_0}X(t)=X(t_0)$.

Def. <u>$\{X(t)\}_{t\in T}$ kontinuerlig</u> om $X(t)$ kontinuerlig i alla $t\in T$.

SATS $X(t)$ kontinuerlig i $t=t_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{s,t\to t_0}R_X(s,t)=R_X(t_0,t_0)$.

Def. <u>$X(t)$ deriverbar i $t=t_0$ med derivata $X'(t)$</u> om $\text{l.i.m.}_{t\to t_0}\frac{X(t)-X(t_0)}{t-t_0}=X'(t_0)$.

Def. <u>$\{X(t)\}_{t\in T}$ deriverbar</u> om $X(t)$ deriverbar i alla $t\in T$.

F SVAGT STATIONÄRA PROCESSER

F.1 Svag Stationaritet

Def. <u>$\{X(t)\}_{t\in T}$ svagt stationär</u> om $m_X(t)$ och $r_X(t,t+\tau)$ ej beror av $t\in T$.

SATS $X(t)$ svagt stationär $\Leftrightarrow$ $m_X(t)$ och $R_X(t,t+\tau)$ beror ej av t.

SATS $X(t)$ stationär $\Rightarrow$ svagt stationär (om m_X och r_X väldefinierade).

Def. <u>Kvf. för svagt stationär process $r_X(\tau)$</u> $\equiv r_X(t,t+\tau)$.

Def. <u>Amf. för svagt stationär process $R_X(\tau)$</u> $\equiv R_X(t,t+\tau)$.

Def. <u>Krf. för svagt stationär process $\rho_X(\tau)$</u> $\equiv \rho_X(t,t+\tau)$.

Def. $X(t)$ och $Y(t)$ <u>stationärt korrelerade</u> om $r_{X,Y}(t,t+\tau)$ ej beror av t.

Def. <u>Korskvf. för stationärt korrelerade $X(t)$ och $Y(t)$ $r_{X,Y}(\tau)$</u> $\equiv r_{X,Y}(t,t+\tau)$.

F.2 Momentfunktioner för Svagt Stationära Processer

SATS $r_X(0)=V_X(t)=\mathbf{Var}\{X(t)\}\geq 0$ och $R_X(0)=\mathbf{E}\{X(t)^2\}\geq 0$.

SATS $|r_X(\tau)|\leq r_X(0)$ med likhet för något $\tau\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $r_X(\tau)$ periodisk.

SATS $|R_X(\tau)|\leq R_X(0)$ med likhet för något $\tau\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$ periodisk.

SATS Svagt stationär $X(t)$ periodisk $\Leftrightarrow$ $r_X(\tau)$ periodisk $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$ periodisk.

SATS $r:(T-T)\to\mathbb{R}$ kvf. (amf.) för någon svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ $\Leftrightarrow$ $r(\tau)$ symmetrisk och positivt semidefinit över $\mathbb{R}$.

F.3 Kontinuitet och Derivata för Svagt Stationära Processer

SATS Svagt stationär $X(t)$ kontinuerlig i visst $t=t_0$ $\Leftrightarrow$ $X(t)$ kontinuerlig $\Leftrightarrow$ $r_X(\tau)$ $(R_X(\tau))$ kontinuerlig i $\tau=0$ $\Leftrightarrow$ $r_X(\tau)$ $(R_X(\tau))$ kontinuerlig.

SATS Svagt stationär $X(t)$ deriverbar i visst $t=t_0$ $\Leftrightarrow$ $X(t)$ deriverbar $\Leftrightarrow$ $r_X(\tau)$ $(R_X(\tau))$ två ggr. deriverbar i $\tau=0$ $\Leftrightarrow$ $r_X(\tau)$ $(R_X(\tau))$ två ggr. deriverbar.

SATS Svagt stationär $X(t)$ n ggr. deriverbar $\Rightarrow$ $X^{(n)}(t)$ svagt stationär med $m_{X^{(n)}}=0$, $r_{X^{(n)}}(\tau)=(-1)^n r_X^{(2n)}(\tau)$ och $r_{X^{(j)},X^{(k)}}(\tau)=(-1)^j r_X^{(j+k)}(\tau)=(-1)^k r_X^{(j+k)}$ $(-\tau)$ för $j+k\leq 2n$.

F.4 Några Svagt Stationära Processer

F.4.1 Diskret Vitt Brus

Def. Diskret vitt brus $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ okorrelerade s.v. med $m_e=0$ och $\mathbf{Var}\{e(t)\}=\sigma^2$.

SATS $e(t)$ svagt stationär med $r_e(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$, $\tau\in\mathbb{Z}$, och $\mathcal{P}_e(f)=\sigma^2$, $f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

F.4.2 Cosinus processen

Def. Cosinus processen $X(t)\equiv\xi\cos(2\pi f_0 t)+\eta\sin(2\pi f_0 t)$, $t\in\mathbb{R}$, där ξ och η okorrelerade med $\mathbf{E}\{\xi\}=\mathbf{E}\{\eta\}=0$ och $\mathbf{Var}\{\xi\}=\mathbf{Var}\{\eta\}=\sigma^2$.

SATS $X(t)$ svagt stationär med $m_X=0$, $r_X(\tau)=\sigma^2\cos(2\pi f_0\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$, och $\mathcal{P}_X(f)=\frac{1}{2}\sigma^2(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$, $f\in\mathbb{R}$.

F.4.3 Linjära processer

Def. Linjär process $X(t)\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e(t-k)$, $t\in\mathbb{Z}$, där $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|<\infty$.

SATS $X(t)$ svagt stationär med $m_X=0$, $r_X(\tau)=\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k c_{k+\tau}$, $\tau\in\mathbb{Z}$, och $\mathcal{P}_X(f)=\sigma^2|\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k \mathrm{e}^{-i2\pi kf}|^2$, $f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Def. MA(q)-process $X(t)\equiv\sum_{k=0}^{q}c_k e(t-k)$, $t\in\mathbb{Z}$, där $c_0=1$.

SATS $X(t)$ svagt stationär med $m_X=0$, $\mathcal{P}_X(f)=\sigma^2|\sum_{k=0}^{q}c_k\mathrm{e}^{-i2\pi kf}|^2$, $f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, och $\mathbb{Z}\ni\tau\mapsto r_X(\tau)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{k=|\tau|}^{q}c_k c_{k-|\tau|} & \text{för } |\tau|\leq q\\ 0 & \text{för } |\tau|>q\end{cases}$.

F.4.4 Hagelbrus

Def. Hagelbrus $X(t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}g(t-\sum_{\ell=1}^{k}\xi_\ell)+\sum_{k=1}^{\infty}g(t+\sum_{\ell=1}^{k}\eta_\ell)$, $t\in\mathbb{R}$, där $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}\sim\exp(\lambda)$ oberoende och $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrerbar.

SATS $X(t)=\int_0^{\infty}g(t-s)\,dY_1(s)+\int_0^{\infty}g(t+s)\,dY_2(s)$ där $Y_1(t)$ och $Y_2(t)$ oberoende Poisson processer.

SATS $X(t)$ svagt stationär med $m_X = \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$, $r_X(\tau) = \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x)g(\tau+x)\,dx$, $\tau \in \mathbb{R}$, och $\mathcal{P}_X(f) = \lambda\,|(\mathfrak{F}g)(f)|^2$, $f \in \mathbb{R}$.

F.4.5 Bandbegränsat Vitt Brus

Def. Bandbegränsat vitt brus svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med $m_X = 0$ och $\mathbb{R} \ni f \mapsto \mathcal{P}_X(f) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{för } |f| \le f_0 \\ 0 & \text{för } |f| > f_0 \end{cases}$.

SATS $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto r_X(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \frac{\sin(2\pi\tau f_0)}{\pi\tau} & \text{för } \tau \neq 0 \\ 2f_0\sigma^2 & \text{för } \tau = 0 \end{cases}$.

F.4.6 AR-processer

Def. AR(p)-process svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med $\sum_{k=0}^{p} a_k X(t-k) = e(t)$, där $a_0 = 1$ och $e(t)$ okorrelerad med $\{X(t-k)\}_{k=1}^{\infty}$ (om $\sum_{k=0}^{p} a_k z_k \neq 0$ för $|z| \le 1$).

SATS (YULE-WALKER) $m_X = 0$, $\begin{cases} r_X(\ell) + a_1 r_X(\ell-1) + \ldots + a_p r_X(\ell-p) = 0 & \text{för } \ell = 1, 2, \ldots \\ r_X(0) + a_1 r_X(1) + \ldots + a_p r_X(p) = \sigma^2 \end{cases}$
och $\mathcal{P}_X(f) = \frac{\sigma^2}{|\sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{e}^{-i2\pi k f}|^2}$, $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

F.4.7 ARMA-processer

Def. ARMA(p, q)-process svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med $\sum_{k=0}^{p} a_k X(t-k) = \sum_{k=0}^{q} c_k e(t-k)$, där $a_0 = c_0 = 1$, och $e(t)$ okorrelerad med $\{X(t-k)\}_{k=1}^{\infty}$.

SATS $m_X = 0$ och $\mathcal{P}_X(f) = \sigma^2 \frac{|\sum_{k=0}^{q} c_k \mathrm{e}^{-i2\pi k f}|^2}{|\sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{e}^{-i2\pi k f}|^2}$, $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

F.4.8 Telegrafsignal

Def. Telegrafsignal $X(t) \equiv \frac{1}{2}[1-(-1)^{Y(t)+\xi}] = (Y(t)+\xi) \bmod 2$ för $t \ge 0$, där $Y(t)$ Poisson process och $\xi \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ oberoende av $Y(t)$.

SATS $m_X(t) = \frac{1}{2} + (p-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{-2\lambda t}$, $t \ge 0$, och $r_X(s,t) = \mathrm{e}^{-2\lambda|t-s|}[\frac{1}{4} - (\frac{1}{2}-p)^2 \mathrm{e}^{-4\lambda \min\{s,t\}}]$, $s, t \ge 0$. $p = \frac{1}{2} \Rightarrow X(t)$ svagt stationär med $\mathcal{P}_X(f) = \frac{\lambda}{4(\pi^2 f^2 + \lambda^2)}$, $f \in \mathbb{R}$.

G GAUSSISKA PROCESSER

G.1 Gaussiska Processer

Def. $\{X(t)\}_{t\in T}$ Gaussisk om ädf. N-fördelade.

SATS Ädf. för Gaussisk process bestäms av vvf. och kvf. Till varje vvf. och kvf. finns Gaussisk process med sådan vvf. och kvf.

SATS Gaussisk process stationär $\Leftrightarrow$ svagt stationär.

G.2 Några Gaussiska Processer

G.2.1 Wiener Processen (Brownsk rörelse)

Def. Wiener process $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ Gaussisk process med $m_W = 0$ och $r_W(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$, $s,t\geq 0$. Standard Wiener process Wiener process med $\sigma^2=1$.

Def. Wiener process med drift $\hat{W}(t) \equiv W(t) + \text{konstant}\cdot t$, $t\geq 0$.

SATS $W(t)$ Lévy process och självsimilär med index $\frac{1}{2}$.

G.2.2 Ornstein-Uhlenbeck Processen

Def. Ornstein-Uhlenbeck process $X(t) \equiv \mathrm{e}^{-\alpha t} W(\mathrm{e}^{2\alpha t})$, $t\in\mathbb{R}$.

SATS $X(t)$ stationär Gaussisk med $m_X=0$, $r_X(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$, $\tau\in\mathbb{R}$, och $\mathcal{P}_X(f) = \frac{2\alpha\sigma^2}{4\pi^2 f^2+\alpha^2}$, $f\in\mathbb{R}$.

G.2.3 Tillämpat Kontinuerligt Vitt Brus (Finns inte)

Def. Tillämpat kontinuerligt vitt brus $N(t)\equiv W'(t)$, $t\geq 0$.

SATS $N(t)$ stationär Gaussisk med $m_N=0$, $r_N(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$, $\tau\geq 0$, och $\mathcal{P}_X(f) = \sigma^2$, $f\in\mathbb{R}$.

H SPEKTRALANALYS

H.1 Spektralframställning Kontinuerlig Tid

SATS (Spektralframställning) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ svagt stationär med kontinuerlig kvf. $\Rightarrow$ $r_X(\tau) = r_X(0)\,\phi_\Theta(\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$, för någon $\mathbb{R}$-värd symmetrisk s.v. Θ.

Def. Diskret (kontinuerligt) spektra om Θ diskret (kontinuerlig) s.v.

Def. Spektraltäthet $\mathcal{P}_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vid kontinuerligt spektra $\mathcal{P}_X(x) \equiv r_X(0) f_\Theta(x)$.

SATS $\mathcal{P}_X(f)$ existerar $\Rightarrow$ $r_X(\tau) = (\mathfrak{F}\mathcal{P}_X)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i2\pi\tau f}\,\mathcal{P}_X(f)\,df$.

SATS $r_X(\tau)$ integrerbar $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_X(f) = (\mathfrak{F}^{-1} r_X)(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i2\pi\tau f} r_X(\tau)\,d\tau$ existerar.

SATS (Spektralmoment) $X(t)$ n ggr. deriverbar $\Leftrightarrow$ $\mathbf{E}\{\Theta^{2n}\}<\infty$.

SATS $\mathcal{P}_X(f)$ existerar och $X(t)$ n ggr. deriverbar $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_{X^{(n)}}(f) = (2\pi f)^{2n}\mathcal{P}_X(f)$.

SATS $\mathcal{P}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spektraltäthet för någon svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}(f)$ icke-negativ och symmetrisk (förutom på nollmängd) samt integrerbar.

SATS Integrerbar $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kvf. (amf.) $\Leftrightarrow$ $(\mathfrak{F}^{-1}r)(f)$ spektraltäthet.

SATS Icke-integrerbar $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kvf. (amf.) om $\hat{r}(\tau) = r(\tau) - C$ integrerbar och $(\mathfrak{F}^{-1}\hat{r})(f)$ spektraltäthet för någon konstant $C>0$.

SATS $r_X(\tau)$ har period p $\Leftrightarrow$ diskret spektra med $\Omega_\Theta \subseteq p\,\mathbb{N} = \{0,\pm p,\pm 2p,\ldots\}$.

H.2 Spektralframställning Diskret Tid

SATS (Spektralframställning) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ svagt stationär $\Rightarrow$ $r_X(\tau) = r_X(0)\,\phi_\Theta(\tau)$, $\tau\in\mathbb{Z}$, för någon $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$-värd s.v. Θ.

Def. Spektraltäthet $\mathcal{P}_X:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{R}$ vid kontinuerligt spektra $\mathcal{P}_X(x)\equiv r_X(0)f_\Theta(x)$.

SATS $\mathcal{P}_X(f)$ existerar $\Rightarrow$ $r_X(k)=(\mathfrak{F}\mathcal{P}_X)(k)=\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{e}^{i2\pi kf}\mathcal{P}_X(f)\,df$.

SATS $r_X(k)$ summerbar $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_X(f)=(\mathfrak{F}^{-1}r_X)(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi fk}r_X(k)$ existerar.

SATS $\mathcal{P}:(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{R}$ spektraltäthet för någon svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}(f)$ är icke-negativ och symmetrisk (förutom på nollmängd) samt integrerbar.

SATS Summerbar $r:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ kvf. $\Leftrightarrow$ $(\mathfrak{F}^{-1}r)(f)$ spektraltäthet.

SATS Icke-summerbar $r:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ kvf. om $\hat{r}(k)=r(k)-C$ summerbar och $(\mathfrak{F}^{-1}\hat{r})(f)$ spektraltäthet för någon konstant $C>0$.

H.3 Korsspektrum

Def. Stationärt korrelerade $X(t)$ och $Y(t)$ har korsspektraltäthet $\mathcal{P}_{X,Y}(f)$ om $r_{X,Y}(\tau)=(\mathfrak{F}\mathcal{P}_{X,Y})(\tau)$.

SATS $\mathcal{P}_{X,Y}(f)$ och $(\mathfrak{F}^{-1}r_{X,Y})(f)$ existerar $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_{X,Y}(f)=(\mathfrak{F}^{-1}r_{X,Y})(f)$.

SATS $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ n ggr. deriverbar och $\mathcal{P}_X(f)$ existerar $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_{X^{(j)},X^{(k)}}(f)=(-1)^k(i2\pi f)^{j+k}\mathcal{P}_X(f)$ för $j+k\le 2n$.

H.4 Spektralframställning för amf.

Def. $\mathcal{S}_X(f)$ effektspektraltäthet om $R_X(\tau)=(\mathfrak{F}\mathcal{S}_X)(\tau)$.

SATS $\mathcal{P}_X(f)$ existerar $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_X(f)=\mathcal{P}_X(f)+m_X^2\delta(f)$.

Def. $\mathcal{S}_{X,Y}(f)$ korseffektspektraltäthet om $R_{X,Y}(\tau)=(\mathfrak{F}\mathcal{S}_{X,Y})(\tau)$.

I FILTERTEORI

I.1 Filter

Def. Filter $\mathfrak{S}$ är linjär insignal-utsignal relation, dvs. för insignaler $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är utsignalen $(\mathfrak{S}(c_1x_1+c_2x_2))(t)=c_1(\mathfrak{S}x_1)(t)+c_2(\mathfrak{S}x_2)(t)$ för $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Def. Kausalt filter har utsignal vid tid t bestämd av insignalen tom. tiden t.

SATS $h:\mathbb{R}\,(\mathbb{Z})\to\mathbb{R}$ integrerbar (summerbar) och $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ $(\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}})$ svagt stationär $\Rightarrow$ $h\star X$ konvergent.

Def. Filter med integrerbart (summerbart) impulssvar h ges av $\mathrm{Ut}(t)=(h\star\mathrm{In})(t)$.

Def. Svagt stationärt filter har svagt stationär utsignal som är stationärt korrelerad med insignalen då insignalen svagt stationär.

SATS Integrerbart (summerbart) impulssvar $\Rightarrow$ svagt stationärt filter med $m_{\mathrm{Ut}}=h\star m_{\mathrm{In}}$, $r_{\mathrm{Ut}}(\tau)=(h\star h(-\cdot)\star r_{\mathrm{In}})(\tau)$ och $r_{\mathrm{In,Ut}}(\tau)=(h\star r_{\mathrm{In}})(\tau)$ då $\mathrm{In}(t)$ svagt stationär.

SATS Filter med integrerbart (summerbart) impulssvar kausalt om $h(u)=0$ för $u<0$.

I.2 Frekvensfunktionen

Def. $\underline{H(f)\ \text{frekvensfunktion}}$ för svagt stationärt filter om $\mathcal{P}_{\mathrm{Ut}}(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_{\mathrm{In}}(f)$ och $\mathcal{P}_{\mathrm{In,Ut}}(f) = H(f)\,\mathcal{P}_{\mathrm{In}}(f)$ för svagt stationär $\mathrm{In}(t)$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_{\mathrm{In}}(f)$.

SATS För filter med integrerbart (summerbart) impulssvar är $H(f) = (\mathfrak{F}^{-1}h)(f)$.

J TILLÄMPNINGAR AV FILTERTEORI

J.1 Hilbertfilter och Envelopp

Def. Hilbertfiltret svagt stationärt filter i kontinuerlig tid med $H(f) = -i\,\mathrm{sign}(f)$, $f \in \mathbb{R}$. Hilberttransformen av $X(t)$ utsignalen från Hilbertfiltret då $X(t)$ insignal.

SATS Hilberttransformen av svagt stationärt $X(t)$ är $\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}\leq|x|\leq n} \frac{X(t-u)}{\pi u}\,du$.

Def. Enveloppen av svagt stationärt $X(t)$ med medelnivå $\mathrm{l.i.m.}_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt = 0$ och Hilberttransform $Y(t)$ är $\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2}$.

J.2 Signalanpassat Filter

Antingen sänds en känd deterministisk signal $s(t)$ eller så sänds 0-signalen. Till den sända signalen adderas stationärt Gaussiskt brus $N(t)$ med $m_N = 0$. Den observerbara signalen $X(t)$ = 'sänd signal' $+\,N(t)$ filtreras, och mha. $\mathrm{Ut}(t) = (h\star X)(t)$ beslutas vilken signal som sänts enligt regeln "besluta $s(t)$ (0) sänd om $\mathrm{Ut}(t) > \frac{(h\star s)(t)}{2}$ $(\leq \frac{(h\star s)(t)}{2})$". Om g löser $s(t-u) = (g\star r_N)(u)$ blir felsannolikheten

$$\mathbf{P}\{\text{beslut } s(t)\ (0) \text{ då } 0\ (s(t)) \text{ sänd}\} = 1-\Phi\Big(\frac{(h\star s)(t)/2}{\sqrt{\mathbf{Var}\{(h\star N)(t)\}}}\Big) = 1-\Phi\Big(\frac{\mathbf{Cov}\{(h\star N)(t),(g\star N)(t)\}}{2\sqrt{\mathbf{Var}\{(h\star N)(t)\}}}\Big)$$

minimala $1-\Phi(\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{Var}\{(g\star N)(t)\}})$ då $h = g$ ($h = \text{konstant}\cdot g$) pga. Cauchy-Schwarz.

J.3 Wiener Filter

Till svagt stationär signal $S(t)$ med $m_S = 0$ adderas oberoende svagt stationärt brus $N(t)$ med $m_N = 0$. Den observerbara signalen $X(t) = S(t)+N(t)$ filtreras. Avvikelsen $\mathbf{E}\{[\mathrm{Ut}(t)-S(t)]^2\} = \mathbf{E}\{[(h\star X)(t)-S(t)]^2\} = \int [|H(f)|^2(\mathcal{P}_N(f)+\mathcal{P}_S(f)) - (2H(f)+1)\mathcal{P}_S(f)]\,df$ blir minimala $\int \frac{\mathcal{P}_S(f)\mathcal{P}_N(f)}{\mathcal{P}_N(f)+\mathcal{P}_S(f)}\,df$ då $H(f) = \frac{\mathcal{P}_S(f)}{\mathcal{P}_N(f)+\mathcal{P}_S(f)}$.

K SKATTNING, ANPASSNING OCH PREDIKTION

K.1 Allmänt om Parameterskattning

Def. Skattningen $\theta_n^\star$ av θ väntevärdesriktig / vvr. (asymptotiskt vvr.) om $\mathbf{E}\{\theta^\star\} = \theta$ $(\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\{\theta_n^\star\} = \theta)$.

Def. Sekvens $\{\theta_n^\star\}_{n=1}^{\infty}$ av skattningar av θ konsistent om $\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty}\theta_n^\star = \theta$.

SATS Asymptotiskt vvr. skattning $\theta_n^\star$ av θ konsistent om $\lim_{n\to\infty}\mathbf{Var}\{\theta_n^\star\} = 0$.

Def. Stokastiskt intervall $[a,b]$ är konfidensintervall (approximativt konfidensintervall) för θ med konfidensgrad $1-\alpha$ om $\mathbf{P}\{a\le\theta\le b\}=1-\alpha$ $(\approx 1-\alpha)$.

SATS $\theta^\star$ asymptotiskt vvr. och approximativt N-fördelad skattning av θ och $\mathbf{P}\{|\mathrm{N}(0,1)|\le\lambda_{\alpha/2}\}=1-\alpha \Rightarrow \theta^\star\pm\lambda_{\alpha/2}\sqrt{\mathbf{Var}\{\theta^\star\}}$ approximativ konfidensintevall för θ.

K.2 Skattning av m_X, r_X och $\mathcal{P}_X$ för Svagt Stationär $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$

SATS $m_n^\star=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X(k)$ vvr. skattning av m_X.

SATS $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X(k)<\infty \Rightarrow m_n^\star$ konsistent med $\mathbf{Var}\{m_n^\star\}\approx\frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X(k)$.

SATS $r_n^\star(\tau)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n-|\tau|}\frac{(X(k)-m_X)(X(k+|\tau|)-m_X)}{n} & \text{för } |\tau|<n\\ 0 & \text{för } |\tau|\ge n\end{cases}$ asymptotiskt vvr. skattning av $r_X(\tau)$.

SATS (Bartlett) $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e(t-k)$ där $\mathbf{E}\{e(t)^4\}=\gamma^4\sigma^4 \Rightarrow r_n^\star(\tau)$ konsistent med $\mathbf{Var}\{r_n^\star(\tau)\}\approx\frac{\gamma^4-3}{n}r_X(\tau)^2+\frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}r_X(k)\,(r_X(k)+r_X(k-\tau))$.

Def. Periodogrammet $\mathcal{P}_n^\star(f)\equiv\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-i2\pi fk}(X(k)-m_X)|^2=(\mathfrak{F}^{-1}r_n^\star)(f)$, $f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

SATS $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|r_X(k)|<\infty \Rightarrow \mathcal{P}_n^\star(f)$ asymptotiskt vvr. skattning av $\mathcal{P}_X(f)$.

SATS $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e(t-k)$ där $\mathbf{E}\{e(t)^4\}<\infty \Rightarrow \mathbf{Var}\{\mathcal{P}_n^\star(f)\}\approx\mathcal{P}_X(f)^2$.

Konsistent skattning av $\mathcal{P}_X(f)$. Dela datamaterial av längd n i m delmaterial av längd $\frac{n}{m}$. Om motsv. periodogram $\mathcal{P}_{n,1}^\star(f),\ldots,\mathcal{P}_{n,m}^\star(f)$ okorrelerade är $\mathcal{P}^\star(f)=\frac{\mathcal{P}_{n,1}^\star(f)+\ldots+\mathcal{P}_{n,m}^\star(f)}{m}$ asymptotiskt vvr. och konsistent med $\mathbf{Var}\{\mathcal{P}^\star(f)\}\approx\frac{1}{m}\mathcal{P}_X(f)^2$.

K.3 Anpassning av MA- och AR-processer

Anpassning av MA-process till data. Skatta $\sigma^2,c_1,\ldots,c_q$ som lösningen till $r_X^\star(\tau)=\sigma^2\sum_{k=|\tau|}^q c_{k-|\tau|}c_k$ för $\tau=0,\ldots,q$.

Anpassning av AR-process till data. Skatta $\sigma^2,a_1,\ldots,a_p$ som lösningen till $\sum_{k=0}^p a_k r_X^\star(\ell-k)=0$ för $\ell=1,\ldots,p$ och $\sum_{k=0}^p a_k r_X^\star(k)=\sigma^2$ (jmf. Yule-Walker).

K.4 Linjär Skattning (Prediktion) för Svagt Stationär $X(t)$

Mha. $P=\sum_{\ell=1}^n b_\ell X(t_\ell)+b_0$ skattas $X(t_{n+1})$. Avvikelsen $\mathbf{E}\{(X(t_{n+1})-P)^2\}$ är

$$r_X(0)-2\sum_{\ell=1}^n b_\ell r_X(t_{n+1}-t_\ell)+\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n b_k b_\ell r_X(t_\ell-t_k)+[m_X(1-\sum_{\ell=1}^n b_\ell)-b_0]^2,$$

som blir minimala $r_X(0)-\sum_{\ell=1}^n b_\ell r_X(t_{n+1}-t_\ell)$ då derivatorna map. $\{b_0\}_{\ell=0}^n$ är 0 ($\Leftrightarrow$ då $\mathbf{Cov}\{X(t_{n+1})-P,X(t_\ell)\}=0$ för $\ell=1,\ldots,p$ och $\mathbf{E}\{X(t_{n+1})-P\}=0$), dvs. då

$$\sum_{k=1}^n b_k r_X(t_\ell-t_k)=r_X(t_{n+1}-t_\ell) \quad \text{för } \ell=1,\ldots,n \quad \text{och} \quad b_0=m_X(1-\sum_{\ell=1}^n b_\ell).$$

SATS Om $X(t)$ AR(p)-process, $t_\ell=\ell$ (enstegs-prediktion) och $n\ge p$, är $b_{n+1-\ell}=-a_\ell$ för $\ell=1,\ldots,p$ och övriga $b_{n+1-\ell}=0$, dvs. $P=\sum_{\ell=1}^p(-a_\ell)X(n+1-\ell)$.