TRE LÖSNINGAR TILL ÖVNING 8.5 och 8.6

Lösning 1. En ARMA(p,q)-process är en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som satisfierar $\sum_{k=0}^{p} a_k X(t-k) = \sum_{\ell=0}^{q} c_\ell\, e(t-\ell)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus med varians σ^2 sådant att $\mathbf{Cov}\{e(t), X(t-\ell\} = 0$ för $\ell \geq 1$, samt $a_0 = c_0 = 1$ och $a_1,\ldots,a_p,c_1,\ldots,c_q \in \mathbb{R}$ är konstanter med $|a_1| < 1$. Enligt Övning 7.9 har $X(t)$ spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = \sigma^2 \left|\sum_{\ell=0}^{q} c_\ell\, \mathrm{e}^{-i2\pi\ell f}\right|^2 \big/ \left|\sum_{k=0}^{p} a_k\, \mathrm{e}^{-i2\pi k f}\right|^2$.

Vi söker kvf. $r_X(\tau)$ för en ARMA$(1,1)$-process. Mha. partialbråksuppdelning

```
In[1]:= z1=1+c/Exp[I*2*Pi*f]; z2=1+c*Exp[I*2*Pi*f]
In[2]:= z3=1+a/Exp[I*2*Pi*f]; z4=1+a*Exp[I*2*Pi*f]
In[3]:= Apart[z1*z2/(z3*z4),Exp[I*2*Pi*f]]
```

Out[3]= $\frac{c}{a} - \frac{a-c-a^2c+c^2a}{(1-a^2)\,(a+\mathrm{e}^{i2\pi f})} + \frac{a-c-a^2c+c^2a}{a\,(1-a^2)\,(1+a\,\mathrm{e}^{i2\pi f})}$

(där $a=a_1$ och $c=c_1$), samt formeln för geometrisk summa, kan vi skriva

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_X(f) &= \sigma^2\left[\frac{c}{a} - \frac{a-c-a^2c+c^2a}{(1-a^2)\,(a+\mathrm{e}^{i2\pi f})} + \frac{a-c-a^2c+c^2a}{a\,(1-a^2)\,(1+a\,\mathrm{e}^{i2\pi f})}\right] \\
&= \sigma^2\left[\frac{c}{a} - \frac{(a-c-a^2c+c^2a)\,a\,\mathrm{e}^{-i2\pi f}}{a\,(1-a^2)\,(1+a\,\mathrm{e}^{-i2\pi f})} + \frac{a-c-a^2c+c^2a}{a\,(1-a^2)\,(1+a\,\mathrm{e}^{i2\pi f})}\right] \\
&= \sigma^2\left[\frac{c}{a} + \frac{a-c-a^2c+c^2a}{a\,(1-a^2)}\left((-a\,\mathrm{e}^{-i2\pi f})\sum_{k=0}^{\infty}(-a\,\mathrm{e}^{-i2\pi f})^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-a\,\mathrm{e}^{i2\pi f})^k\right)\right] \\
&= \sigma^2\left[\frac{c}{a} + \frac{(a-c-a^2c+c^2a)}{a\,(1-a^2)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-a)^{|k|}\,\mathrm{e}^{-i2\pi f k}\right].
\end{aligned}$$

Eftersom $\mathcal{P}_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f k}\, r_X(k)$ följer att

$$r_X(k) = \sigma^2\left[\frac{c_1}{a_1}\,\delta(k) + \frac{a_1-c_1-a_1^2c_1+c_1^2a_1}{a_1\,(1-a_1^2)}\,(-a_1)^{|k|}\right] \quad \text{för} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Lösning 2. Vi arbetar med uttrycket för spektraltätheten från Övning 7.9:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_X(f) &= \sigma^2\,\frac{\left|\sum_{\ell=0}^{q} c_\ell\,\mathrm{e}^{-i2\pi\ell f}\right|^2}{\left|\sum_{k=0}^{p} a_k\,\mathrm{e}^{-i2\pi k f}\right|^2} \\
&= \sigma^2\,\frac{(1+c_1\mathrm{e}^{-i2\pi f})\,(1+c_1\mathrm{e}^{i2\pi f})}{(1+a_1\mathrm{e}^{-i2\pi f})\,(1+a_1\mathrm{e}^{i2\pi f})} \\
&= \sigma^2\,\frac{1+c_1^2+2c_1\cos(2\pi f)}{1+a_1^2+2a_1\cos(2\pi f)} \\
&= \sigma^2\left[\frac{c_1}{a_1}\,\frac{1+a_1^2+2a_1\cos(2\pi f)}{1+a_1^2+2a_1\cos(2\pi f)} - \frac{c_1}{a_1}\,\frac{1+a_1^2-(a_1/c_1)\,(1+c_1^2)}{1+a_1^2+2a_1\cos(2\pi f)}\right]
\end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{c_1}{a_1} - \frac{1}{a_1} \frac{c_1 + c_1 a_1^2 - a_1 - a_1 c_1^2}{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos(2\pi f)} \right].$$

Enligt Övning 7.5 har $r(k) = (-a_1)^{|k|}$ inverstransform $\frac{1-a_1^2}{1+a_1^2+2a_1\cos(2\pi f)}$. Eftersom $r_X(k)$ har inverstransform $\mathcal{P}_X(f)$ enligt ovan följer att $r_X(k)$ ges av

$$\sigma^2 \left[\frac{c_1}{a_1} \delta(k) + \frac{a_1 - c_1 - a_1^2 c_1 + c_1^2 a_1}{a_1 (1 - a_1^2)} r(k) \right] = \sigma^2 \left[\frac{c_1}{a_1} \delta(k) + \frac{a_1 - c_1 - a_1^2 c_1 + c_1^2 a_1}{a_1 (1 - a_1^2)} (-a_1)^{|k|} \right].$$

$\boxed{\text{Lösning 3.}}$ Uttrycket för $\mathcal{P}_X(f)$ från Övning 7.9 och residue kalkyl visar att

$$\begin{aligned}
r_X(-k) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi fk} \mathcal{P}_X(f)\, df = \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi fk} \sigma^2 \frac{(1+c_1 e^{-i2\pi f})(1+c_1 e^{i2\pi f})}{(1+a_1 e^{-i2\pi f})(1+a_1 e^{i2\pi f})}\, df \\
&= \left[\begin{array}{rl} e^{i2\pi f} &= z \\ i2\pi\, e^{i2\pi f}\, df &= dz \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{i2\pi} \int_{\substack{z \text{ längs komplexa} \\ \text{enhetscirkeln}}} z^{k-1} \frac{\sigma^2}{a_1} \frac{(z+c_1)(1+c_1 z)}{(z+a_1)(1/a_1+z)}\, dz \\
&= \sum_{x \in \{0, -a_1\}} \mathrm{Res}_{z=x} \left(z^{k-1} \frac{\sigma^2}{a_1} \frac{(z+c_1)(1+c_1 z)}{(z+a_1)(1/a_1+z)} \right)
\end{aligned}$$

för $k \geq 0$, där 0 och $-a_1$ är integrandens singulariteter innanför enhetscirkeln (kom ihåg att $|a_1| < 1$). Residuen $\mathrm{Res}_{z=x}(f(z))$ är det värde för konstanten $R \in \mathbb{C}$ som gör funktionen $f(z) - \frac{R}{z-x}$ icke-singulär i punkten $z = x$. Man ser lätt att

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=-a_1} \left(z^{k-1} \frac{\sigma^2}{a_1} \frac{(z+c_1)(1+c_1 z)}{(z+a_1)(1/a_1+z)} \right) &= -\sigma^2 \frac{(c_1 - a_1)(1 - c_1 a_1)(-a_1)^k}{a_1 (1 - a_1^2)}, \\
\mathrm{Res}_{z=0} \left(z^{k-1} \frac{\sigma^2}{a_1} \frac{(z+c_1)(1+c_1 z)}{(z+a_1)(1/a_1+z)} \right) &= \begin{cases} \sigma^2 c_1/a_1 & \text{om } k = 0 \\ 0 & \text{om } k > 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Mha. symmetri erhåller vi nu samma uttryck som i Lösning 1 och 2 för $r_X(k)$.