Tentamen i Stokastiska Processer den 26/4-100 kl. 14^{15}-19^{15}

Jour: Börje Carlsson 772 5347

Lärare: Patrik Albin 0091 (607) 255 9133

Hjälpmedel: Kompendiet "Albin: Stokastiska Processer för Teknisk Högskola" (september 98 eller oktober 99), rättningsstencil till kompendiet, boken "Leon-Garcia: Probability and Random Processes for Electrical Engineering", Beta, typgodkänd räknare, samt handskrivna föreläsningsanteckningar. Projektstenciler "simulering av stokastiska processer" och "analys och simulering av ett digitalt kommunikationssystem" får också medföras, liksom de stenciler med övningsuppgifter och gamla tentamina som finns upplagda på `www` (utdrag ur kompendiet avsedda för dem som endast läser boken). De fullständiga lösningar till övningar och hemövningar som finns på `www` och delats ut får inte medföras vid tentamen.

Övningstentamen ger ej bonus vid denna och senare omtentamina.

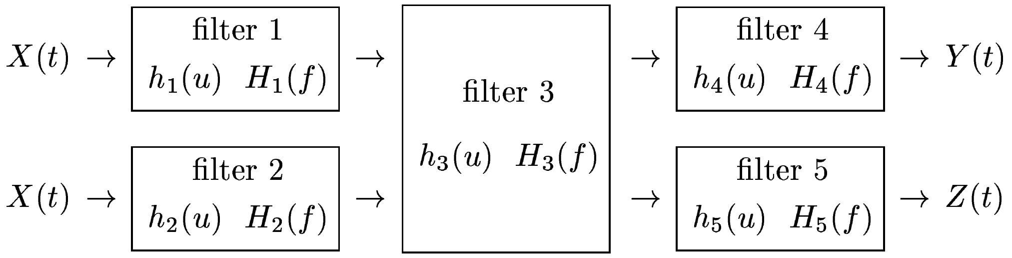
Tentamensresultat. Patrik Albin är i USA tom. mitten av juni, så inlämnade svar till tentamen skickas dit för rättning. Rättningsproceduren kan därför komma att ta lite längre tid än normalt.

I tentamenstexten förekommer anmodan att "förklara" flera gånger. Det är härvid aldrig nödvändigt att förklara allt "från noll", utan räcker att tex. utgå från något i litteraturen (dvs. alla tillåtna hjälpmedel), om man hittar lämplig sådan utgångspunkt. Det går även att förklara saker via "mjukare" (heuristiska/intiutiva) argument, men dessa argument måste då vara goda nog att övertyga examinator.

Explicita matematiska rutinberäkningar kan ibland utelämnas utan att det resulterar i nämnvärda poängavdrag. Den som vill använda sig av denna form av "genvägar" måste använda sitt omdöme och förlita sig på att detta överensstämmer med examinators (som dock kan påräknas vara relativt "välvilligt inställd"). En god regel är att om man själv ser hur det skall gå till att slutföra alla nödvändiga räkningar, så har man kommit långt nog och behöver inte göra dem (speciellt om man indikerar hur de kan slutföras). Men om man inte kan se detta så kan arbete återstå att göra (för full poäng). Observera att få ting i matematik och statistik går att räkna ut explicit, så det räcker inte alltid att skriva "räkna ut det där explicit så är allt klart" utan att verkligen övertyga examinator om att detta går och att man har en plan för hur det skall utföras.

Uppgift 6. Det finns en Uppgift 6 avsedd för elever som gjort projekt 1, och en avsedd för dem som gjort projekt 2. Tentanden skall endast lämna lösning till en av dessa uppgifter. (Om lösning lämnas till båda beaktas enbart den mest lätt-rättade lösningen vid examination.) Uppgift 6 bedöms som godkänd eller underkänd, varvid godkänt svarar mot en 40-procentig insats jämfört en perfekt lösning.

Uppgift 1 En svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_X(\tau)$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)$ är (på en gång) insignal till två olika system av filter, som vardera omfattar tre konsekutiva filtreringar enligt följande figur:



a Ange mha. enkla villkor på frekvensfunktionerna $H_1(f)$, $H_2(f)$, $H_3(f)$, $H_4(f)$, $H_5(f)$, när det gäller att utsignalen $Y(t)$ från det första filtersystemet har samma kovariansfunktion som utsignalen $Z(t)$ från det andra filtersystemet. **(1.5 poäng)**

b Ange mha. enkla villkor på frekvensfunktionerna $H_1(f)$, $H_2(f)$, $H_3(f)$, $H_4(f)$, $H_5(f)$, när det gäller att utsignalen $Y(t)$ från det första filtersystemet är lika med utsignalen $Z(t)$ från det andra filtersystemet. **(2 poäng)**

c Utred något vad det är som skiljer, eller ev. inte skiljer (dvs. vad som ev. är gemensamt för), de båda frågeställningarna i Uppgift 1.a och 1.b. **(1.5 poäng)**

Uppgift 2 I Uppgift 2.a - 2.c är $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en stationär Gaussisk process med kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathrm{e}^{-3|\tau|}$ för $\tau \in \mathbb{R}$ och väntevärde $m_X = \frac{\pi}{4}$.

a Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\big\{X(1) \leq \frac{1}{2}X(2)\big\}$. **(1 poäng)**

b Beräkna kovariansfunktionen $r_Y(t, t+\tau)$ för processen $Y(t) = X(2t)$, och visa att $Y(t)$ är stationär. **(1 poäng)**

c Beräkna kovariansfunktionen $r_Z(t, t+\tau)$ för processen $Z(t) = X(t) - Y(t) = X(t) - X(2t)$, och visa att $Z(t)$ ej är stationär. **(1.5 poäng)**

d Enligt uppgift c kan differensen mellan två svagt stationära processer $X(t)$ och $Y(t)$ vara icke-stationär. Ange villkor på $X(t)$ och $Y(t)$ (som ej längre behöver vara de ovan definierade processerna) som garanterar att differensen mellan processerna är svagt stationär då var och en av processerna är svagt stationär. (Att svara med villkoret "$X(t)-Y(t)$ svagt stationär" ger inga poäng.) **(1.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 3}}$ $\boxed{\textbf{a}}$ Ge ett exempel på en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, med väntevärde $\mathbf{E}\{X(t)\}=0$ och kovariansfunktion $r_X(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$, som <u>ej</u> är en Wiener process. **(1.25 poäng)**

$\boxed{\textbf{b}}$ Ge ett exempel på en stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som har kovariansfunktion $r_X(\tau)=\frac{1}{2}$ för $\tau\in\mathbb{Z}$. **(1.25 poäng)**

$\boxed{\textbf{c}}$ Ge ett exempel på en hagelbrus process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ som <u>ej</u> är en Gaussisk process. **(1.25 poäng)**

$\boxed{\textbf{d}}$ Ge ett exempel på en stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som har kovariansfunktion $r_X(\tau)=\sin\big(\frac{\pi}{2}+\pi\tau\big)$ för $\tau\in\mathbb{Z}$. **(1.25 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 4}}$ $\boxed{\textbf{a}}$ Ge ett exempel på en stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som har spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=\sin\big(\frac{\pi}{2}+\pi f\big)$ för $f\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Eller så förklara varför det inte finns något exempel på en sådan process. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{b}}$ Ge ett exempel på en svagt stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ som har spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=\sin\big(\frac{\pi}{2}+\pi f\big)$ för $f\in\mathbb{R}$. Eller så förklara varför det inte finns något exempel på en sådan process. **(0.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{c}}$ Ge ett exempel på en stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som har spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=\mathrm{e}^{-|f|}$ för $f\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Eller så förklara varför det inte finns något exempel på en sådan process. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{d}}$ Ge ett exempel på en icke-Gaussisk svagt stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ som har kovariansfunktion $r_X(\tau)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(2\pi\tau)^2}$ för $\tau\in\mathbb{R}$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(2\pi f)^2}$ för $f\in\mathbb{R}$. Eller så förklara varför det inte finns något exempel på en sådan process. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 5}}$ $\boxed{\textbf{a}}$ Till en svagt stationär signal $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med känt väntevärde $m_S=0$, men okänd kovariansfunktion $r_S(\tau)$ och okänd spektraltäthet $\mathcal{P}_S(f)$, adderas oberoende svagt stationärt brus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med känt väntevärde $m_N=0$, men okänd kovariansfunktion $r_N(\tau)$ och okänd spektraltäthet $\mathcal{P}_N(f)$. Den observerbara signalen $X(t)=S(t)+N(t)$ filtreras i ett filter med impulssvar

$h(k)$ och frekvensfunktion $H(f)$. Förklara hur man, realistiskt (i "verkliga livet"), mha. observationer av $N(t)$ (den observerbara signalen då ingen signal sänds) och $X(t) = S(t)+N(t)$ (den observerbara signalen då signal sänds) kan skatta impulssvaret $h(k)$ och frekvensfunktionen $H(f)$ för det filter vars utsignal $Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(t-k)$ minimerar $\mathbf{E}\{[Y(t)-S(t)]^2\}$. **(2 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ Antingen har en känd deterministisk signal $\{s(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ sänts, eller så har 0-signalen sänts. Till den sända signalen [$s(t)$ eller 0] adderas svagt stationärt Gaussiskt brus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med känt väntevärde $m_N = 0$, men okänd kovariansfunktion $r_N(\tau)$ och okänd spektraltäthet $\mathcal{P}_N(f)$. Den observerbara signalen $X(t)$ [antingen $s(t)$+$N(t)$ eller enbart $N(t)$] filtreras i ett filter med impulssvar $h(k)$ och frekvensfunktion $H(f)$. Mha. utsignalen från filtret $Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(t-k)$ används följande beslutsförfarande för att avgöra huruvida $s(t)$ sänts eller ej:

$$\text{besluta } s(t) \text{ sänd om } Y(t) > \tfrac{1}{2}s_{\mathrm{ut}}(t), \qquad \text{besluta } 0 \text{ sänd om } Y(t) \leq \tfrac{1}{2}s_{\mathrm{ut}}(t).$$

Förklara hur man, realistiskt (i "verkliga livet"), mha. kännedom om $s(t)$ samt observationer av $N(t)$ (den observerbara signalen då ingen signal sänts) kan skatta impulssvaret $h(k)$ och frekvensfunktionen $H(f)$ för det filter vars utsignal $Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(t-k)$ minimerar sannolikheterna

$$\mathbf{P}\{\text{beslutar } s(t) \text{ sänd då } 0 \text{ sänd}\} \quad \text{och} \quad \mathbf{P}\{\text{beslutar } 0 \text{ sänd då } s(t) \text{ sänd}\}$$

för felbeslut i ovan beskrivna bestutsförfarande. **(3 poäng)**

Uppgift 6 - Projekt 1 $\boxed{\mathbf{a}}$ Det finns stokastiska variabler som varken är diskreta eller kontinuerliga. Ett exempel på en sådan stokastisk variabel, som användes för att beskriva väntetider i kösystem, är

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{med sannolikhet} \quad p \\ X & \text{med sannolikhet} \quad 1-p \end{cases},$$

där X är en exp(λ)-fördelad stokastisk variabel och $p \in (0,1)$ en konstant. Förklara hur man kan simulera en sådan stokastisk variabel Y i en dator. **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ Förklara hur man mha. datorsimulering kan skatta sannolikheten $p = \mathbf{P}\{X(5) = 1,\ X(10) = 1\}$ för den hagelbrusprocess $X(t)$ som figurerar i Programmeringsuppgift 1 i Projekt 1. **(2 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Förklara hur man mha. datorsimulering kan skatta sannolikheten $p = \mathbf{P}\{W(t) > t \text{ för något } t \in [0,1]\}$, för en standard Wiener process $W(t)$. **(2 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 6 - Projekt 2}}$ Som bekant är "helt vitt brus" inte så lätt att realisera i verkligheten, och det är heller inte självklart vad helt vitt brus är. Dessutom finns i moderna tekniska tillämpningar ett starkt tilltagande intresse för att studera modeller med brus som inte alls är "särskilt vita", tex. för att modellera olika internet-företeelser. Detta är motiveringen till följande val av sjätteuppgift:

$\boxed{\textbf{a}}$ Diskutera några (helst flera) olika sätt att modellera vitt brus i kontinuerlig och diskret tid. Belys olika aspekter av de olika modellerna, som tex. existensproblem, grad av oberoende mellan brusprocessens värden i olika tidpunkter, frekvensinnehåll, vad det är som gör att modellerna kan betraktas som "mer eller mindre vita", hur modellerna skiljer sig åt, liknar varandra, etc. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{b}}$ Det "ofysikaliska" Gaussiska vita bruset $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_W(t) = \frac{1}{2}N_0\,\delta(t)$ i Projekt 2, ersättes med ett "verkligt" Gaussiskt stationärt brus $\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, med väntevärde ε (ev. skilt från noll), och kovariansfunktion

$$r_{\hat{W}}(\tau) = \begin{cases} n\,(1-|n\tau|) & \text{för} \quad |\tau| \leq 1/n \\ 0 & \text{för} \quad |\tau| > 1/n \end{cases},$$

där n är ett stort tal [så att $r_{\hat{W}}(\tau)$ är ganska lik en δ-spik - arean under grafen av $r_{\hat{W}}(\tau)$ är ju ett]. Förklara hur man kan beräkna fördelningen för brusdelen $N(m)$ av utsignalen från filtret i mottagaren, och därmed beräkna bitfelssannolikheten P_b även i detta fall. Vi behåller samma filter som i Projekt 2, fastän det inte längre är optimalt, så att i analogi med tidigare $N(m) = \int_{mT}^{(m+1)T} \frac{1}{\sqrt{T}}\,\hat{W}(u)\,du$. Vi använder också samma beslutskrets (mottagare) som tidigare. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{c}}$ Antag att man skaffat sig information om det "verkliga" bruset $\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ genom att helt enkelt observera och registrera det (då ingen signal sänts). Det föreligger mao. en observation [en realisering (för ett visst $\omega \in \Omega$)] av brusprocessen $\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, som tänkes lagrad i en datafil. [Bortse från det relativt triviala problemet att man inte kan lagra alla dessa värden, utan måste både sampla (diskretisera) och trunkera (inte ta med allt från minus till plus oändligheten)].

Förklara hur man kan använda datamatrialet till att skatta bitfelssannolikheten P_b [där vi nu alltså tänker oss att det ofysikaliska bruset $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ersatts med det verkliga och observerbara bruset $\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$]. **(1 poäng)**

LYCKA TILL!