TENTAMEN I STOKASTISKA PROCESSER den 14/8-00 kl. 14^{15}-19^{15}

Jour: Börje Carlsson 772 5347

Lärare: Patrik Albin 772 3512

Hjälpmedel: Kompendiet "Albin: Stokastiska Processer för Teknisk Högskola" (september 98 eller oktober 99), rättningsstencil till kompendiet, boken "Leon-Garcia: Probability and Random Processes for Electrical Engineering", Beta, typgodkänd räknare, handskrivna föreläsningsanteckningar, projektstenciler "simulering av stokastiska processer" och "analys och simulering av ett digitalt kommunikationssystem", samt stenciler med tentamensskrivningar tom. 990816 med lösningar och övningsuppgifter som finns på `www` (utdrag ur kompendiet). De fullständiga lösningar till övningar som finns på `www` och har delats ut, samt tentamensskrivningar from. 991215 (med eller utan lösningar) få ej medföras vid tentamen.

Övningstentamen ger ej bonus vid denna omtentamen.

Då man i tesen anmodas att förklara (motivera) något, så är det ej nödvändigt att förklara (motivera) "från noll", utan räcker att tex. utgå från något i litteraturen (alla tillåtna hjälpmedel). Det går även att förklara saker via "mjukare" (intiutiva) argument, men dessa måste då vara goda nog att övertyga examinator.

Explicita matematiska rutinberäkningar kan ibland utelämnas utan nämnvärda poängavdrag. Den som vill använda sig av denna form av "genvägar" måste använda sitt omdömme och förlita sig på att detta överensstämmer med examinators. En god regel är att om man själv ser hur alla beräkningar kan slutföras, så har man kommit långt nog och behöver ej göra dem. Men om man inte ser detta så återstår arbete att göra. Notera att få ting i matematik går att räkna ut explicit, så det räcker inte skriva "räkna ut det där explicit så är allt klart" utan att övertyga examinator om att detta går och att man har en plan för hur det skall utföras.

Det finns en **Uppgift 6** avsedd för elever som gjort projekt 1, och en avsedd för de som gjort projekt 2. Lösning skall enbart lämnas till en av dessa uppgifter. (Om lösning lämnas till båda räknas den sämsta vid examination.) Uppgift 6 bedöms som godkänd eller underkänd, varvid godkänt svarar mot en "40-procentig insats".

Uppgift 1 En svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ i kontinuerlig tid är insignal till ett system av filter med utsignal $Y(t)$ enligt följande figur:

$$X(t) \to \boxed{\begin{array}{c}\text{filter 1}\\ h_1(u)\quad H_1(f)\end{array}} \to \boxed{\begin{array}{c}\text{filter 2}\\ h_2(u)\quad H_2(f)\end{array}} \to \boxed{\begin{array}{c}\text{filter 3}\\ h_3(u)\quad H_3(f)\end{array}} \to Y(t)\,.$$

a Ange mha. enkla villkor på frekvensfunktionerna $H_1(f)$, $H_2(f)$, $H_3(f)$ när det gäller att $Y(t)$ har samma kovariansfunktion som $X(t)$. **(1 poäng)**

b Ange mha. enkla villkor på frekvensfunktionerna $H_1(f)$, $H_2(f)$, $H_3(f)$ när det gäller att $Y(t)$ är lika med $X(t)$. **(1.5 poäng)**

c Förklara varför svaren till Uppgifterna 1.a och 1.b kan vara olika. **(1 poäng)**

d Ange (med namn) ett speciellt filter som figurerar i kursen, för vilket det gäller att filtrets utsignal har samma kovariansfunktion som dess insignal. **(1.5 poäng)**

Uppgift 2 Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poisson process med intensitet 1.

a Beskriv hur $\mathbf{P}\big\{X(1)\leq \frac{1}{2}X(2)\big\}$ kan beräknas. Det räcker tex. att svara med någon form av summa, vars värde ej behöver beräknas. Det går också bra att svara med något dataprogram eller flödesschema som löser uppgiften. **(2.5 poäng)**

b Sätt $Y(t)=X(t)-t$ för $t\geq 0$ och $Z(t)=\mathrm{e}^{-t/2}\,Y(\mathrm{e}^t)$ för $t\in\mathbb{R}$. Är processen $Z(t)$ svagt stationär och/eller stationär? Motivera svaret. **(2.5 poäng)**

Uppgift 3 **a** Ge ett exempel på en MA-process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som ej är en Gaussisk process. Motivering krävs. **(1 poäng)**

b Ge ett exempel på en AR-process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som ej är en Gaussisk process. Motivering krävs. **(1.5 poäng)**

c Ge ett exempel på en svagt stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, som har kovariansfunktion $r_X(\tau)\neq 0$ för $\tau=0$ och 1 samt $r_X(\tau)=0$ för $|\tau|\geq 2$. **(1 poäng)**

d Ge ett exempel på en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, med $\mathbf{E}\{X(t)\}=t$ och $\mathbf{Cov}\{X(s),X(t)\}=\min\{s,t\}$, som ej är en Poisson process. **(1.5 poäng)**

Uppgift 4 Låt $\xi_1,\xi_2,\ldots,\eta_1,\eta_2,\ldots$ vara oberoende exp(1)-fördelade stokastiska variabler. Betrakta den stokastiska processen

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty} g\big(t-\sum_{\ell=1}^{k}\xi_\ell\big)+\sum_{k=1}^{\infty} g\big(t+\sum_{\ell=1}^{k}\eta_\ell\big)\qquad \text{för}\quad t\in\mathbb{R},$$

där funktionen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ges av $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ för $x\in[0,2)$ och $g(x)=0$ för övrigt.

I ett datamaterial $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ av observationer av $X(t)$ har värdet $X(0)$ förlorats. Hur kan man mha. resterande data $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ skatta $X(0)$? **(5 poäng)**

Uppgift 5 En svagt stationär signal $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, med väntevärde 0 och spektraltäthet $\mathcal{P}_S(f)$, sänds över en kanal med additivt brus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, som är svagt stationärt, oberoende av $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, med väntevärde 0 och spektraltäthet $\mathcal{P}_N(f)$.

Då den observerbara signalen $X(t) = S(t)+N(t)$ mottages introduceras en distorsion, som modelleras som ett filter med impulssvar $\hat{h}(u)$ och reell icke-negativ frekvensfunktion $\hat{H}(f)$. Den signal som föreligger efter mottagaren är alltså

$$\hat{X}(t) = (h\star X)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(u)\,[S(t-u)+N(t-u)]\,du.$$

a Visa att det filter vars utsignal $Y(t)$ minimerar $\mathbf{E}\{[Y(t)-S(t)]^2\}$ då insignalen är $\hat{X}(t)$, har frekvensfunktion $H(f) = \frac{\mathcal{P}_S(f)/\hat{H}(f)}{\mathcal{P}_S(f)+\mathcal{P}_N(f)}$. **(3 poäng)**

b Bestäm SNR $\mathbf{E}\{S(t)^2\}/\mathbf{E}\{[Y(t)–S(t)]^2\}$ för filtret i Uppgift 5.a. **(2 poäng)**

Uppgift 6 - Projekt 1 **a** Betrakta följande `Splus`-program:

```
> X <- 0; Y <- 0; xisum <- -2*log(1-runif(1))
> while (xisum <= 5) {
  + xisum <- xisum - 2*log(1-runif(1)); X <- X+1; Y <- Y+1}
> while (xisum <= 10) {
  + xisum <- xisum - 2*log(1-runif(1)); Y <- Y+1}
> X; Y
```

där `runif(1)` ger ett slumptal likformigt fördelat över $(0,1)$. Programmet skriver ut värdet av de stokastiska variabler X och Y, som är relaterade till en viss stokastisk process. Ange denna relation. [Den som ej ser vilken process det rör sig om kan istället beskriva fördelningen för den $\mathbb{R}^2$-värda variabeln (X,Y).] **(2 poäng)**

b En stokastisk variabel som varken är diskret eller kontinuerlig ges tex. av

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{med sannolikhet} \quad p \\ X & \text{med sannolikhet} \quad 1-p \end{cases},$$

där X är en $\exp(\lambda)$-fördelad stokastisk variabel och $p\in(0,1)$ en konstant. Säg något om varför denna stokastiska variabel (varken diskret eller kontinuerlig) skulle kunna vara en rimlig beskrivning av väntetiden innan betjäning i något kösystem. Förklara sedan hur man kan simulera variabeln Y i en dator. **(1 poäng)**

c Betrakta AR(1)-processen $X(t)+\frac{1}{2}X(t-1) = e(t)$, $t\in\mathbb{Z}$, där bruset $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är Gaussiskt med $\sigma^2=1$. Notera att $X(1)$ är $\mathrm{N}(0,\frac{4}{3})$-fördelad, eftersom $r_X(0)=\frac{4}{3}$.

Visa mha. någon (ej nödvändigtvis “verklig”) programkod eller ett flödesschema hur man mha. simulering kan skatta $\mathbf{P}\{\max[X(1),\ldots,X(10)]\geq 3\}$. **(2 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 6 - Projekt 2}}$ Kontinuerligt vitt brus är ej realiserbart i verkligheten, och det är inte ens helt klart vad det är. I moderna tekniska tillämpningar finns ett behov av att använda icke-vita brus, tex. för att modellera olika internet-företeelser. Detta är skälet till att följande sjätteuppgift figurerar för tredje gången i rad:

$\boxed{\textbf{a}}$ Diskutera några (helst flera) olika sätt att modellera vitt brus i kontinuerlig och diskret tid. Belys olika aspekter av de olika modellerna, som tex. existensproblem, grad av oberoende mellan brusprocessens värden i olika tidpunkter, frekvensinnehåll, vad det är som gör att modellerna kan betraktas som "mer eller mindre vita", hur modellerna skiljer sig åt, liknar varandra, etc. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{b}}$ Det "ofysikaliska" Gaussiska vita bruset $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_W(t)=\frac{1}{2}N_0\,\delta(t)$ i Projekt 2, ersättes med ett "verkligt" Gaussiskt stationärt brus $\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, med väntevärde $m_{\hat{W}}=\mathbf{E}\{\hat{W}(t)\}=0$, och kovariansfunktion

$$r_{\hat{W}}(\tau)=\begin{cases} n\,(1-|n\tau|) & \text{för} \quad |\tau|\leq 1/n \\ 0 & \text{för} \quad |\tau|>1/n \end{cases},$$

där n är ett stort tal [så att $r_{\hat{W}}(\tau)$ är ganska lik en δ-spik - arean under grafen av $r_{\hat{W}}(\tau)$ är ju ett]. Förklara hur man kan beräkna fördelningen för brusdelen $N(m)$ av utsignalen från filtret i mottagaren, och därmed beräkna bitfelssannolikheten P_b även i detta fall. Samma filter som i Projekt 2 användes, fastän det inte längre är optimalt, så att i analogi med tidigare $N(m)=\int_{mT}^{(m+1)T}\frac{1}{\sqrt{T}}\,\hat{W}(u)\,du$. Beslutskretsen (mottagaren) är också samma som tidigare. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{c}}$ Man har skaffat sig information om det "verkliga" bruset $\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ genom att observera och registrera det (då ingen signal sänts). Det föreligger alltså en observation av brusprocessen $\{\hat{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, som tänks lagrad i datafil. [Bortse från att sampling (diskretisering) och trunkering uppenbart är nödvändigt.]

Förklara hur man kan använda datamatrialet till att skatta bitfelssannolikheten P_b [där nu alltså $W(t)$ ersatts med det verkliga bruset $\hat{W}(t)$]. **(1 poäng)**

$\boxed{\textbf{LYCKA TILL!}}$

Lösningar till Tentamen i Stokastiska Processer den 14/8-00

Uppgift 1 **a** Då $|H_1(f)H_2(f)H_3(f)| = 1$.

b Då $H_1(f)H_2(f)H_3(f) = 1$.

c Likhet för kovariansfunktionerna är ett svagare krav än likhet mellan signalerna.

d Hilbertfiltret.

Uppgift 2 Eftersom $X(2)-X(1)$ och $X(1)$ är oberoende Po(1)-fördelade är

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X(1)\leq \tfrac{1}{2}X(2)\} &= \mathbf{P}\{X(2)-X(1)\geq X(1)\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X(2)-X(1)\geq k \mid X(1)=k\}\,\mathbf{P}\{X(1)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty} \mathbf{P}\{X(1)=\ell\}\,\mathbf{P}\{X(1)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty} (\mathrm{e}^{-1}/(k!))\,(\mathrm{e}^{-1}/(\ell!)).
\end{aligned}$$

b Eftersom $m_X(t)=t$ är $m_Y(t)=m_Z(t)=0$. Vidare är $r_Z(s,t) = \mathrm{e}^{-s/2}\mathrm{e}^{-t/2}r_Y(\mathrm{e}^s,\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{-(s+t)/2}\min\{\mathrm{e}^s,\mathrm{e}^t\} = \mathrm{e}^{-|t-s|/2}$. Alltså är $Z(t)$ svagt stationär. Men $Z(t)$ är ej stationär, ty de möjliga värdena för $Z(0)$ är $\{-1,0,1,\ldots\}$, medan de för $Z(1)$ är $\mathrm{e}^{-1/2}\{-\mathrm{e},1-\mathrm{e},2-\mathrm{e},\ldots\}$, så att $Z(0)$ och $Z(1)$ ej är likafördelade.

Uppgift 3 **a** MA(1)-processen $X(t) = e(t)+e(t-1)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är vitt brus med $e(t)$ likformigt fördelad över $(-1,1)$, ty $X(t)$ har möjliga värden $(-2,2)$.

b AR(1)-processen $X(t) = \frac{1}{2}X(t-1)+e(t)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är vitt brus med $e(t)$ likformigt fördelad över $(-1,1)$, ty $X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}e(t-k)$ (jämför beviset av Sats 8.6) och $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$, så att de möjliga värdena för $X(t)$ är $(-2,2)$.

c En MA(1)-process (se Övning 8.1).

d Processen $X(t)=W(t)+t$, där $W(t)$ är en standard Wiener process.

Uppgift 4 Genom att utnyttja Sats 3.7 i enkla räkningar ser vi att $m_X=\sqrt{2}$, medan $r_X(0)=1$ och $r_X(1)=\frac{1}{2}$, samt $r_X(k)=0$ för alla andra $k\in\mathbb{Z}$.

Vi skattar $X(0)$ med den lineära skattning $\mathcal{S} = aX(-1)+bX(1)+c$ som minimerar $\mathbf{E}\{[X(0)-\mathcal{S}]^2\} = [\mathbf{E}\{X(0)-\mathcal{S}\}]^2+\mathbf{Var}\{X(0)-\mathcal{S}\}$. Alla andra datavärden än $X(1)$ och $X(-1)$ är okorrelerade med $X(0)$, och förbättrar därför ej skattningen.

Genom att utnyttja Övning 9.21 ser vi att $a = b = \frac{r_X(1)}{r_X(0)+r_X(2)} = \frac{1}{2}$ minimerar $\mathbf{Var}\{X(0)-\mathcal{S}\}$. Sedan blir $[\mathbf{E}\{X(0)-\mathcal{S}\}]^2 = 0$ om $c=0$.

Uppgift 5 Signalen $X(t)$ filtreras i två filter med frekvensfunktioner $\hat{H}(f)$ och $H(f)$. Enligt teorin i avsnitt 8.6 är det optimalt om det "sammanlagda filtrets" frekvensfunktion $\hat{H}(f)H(f)$ är $\frac{\mathcal{P}_S(f)}{\mathcal{P}_S(f)+\mathcal{P}_N(f)}$, vilket ger $H(f) = \frac{\mathcal{P}_S(f)/\hat{H}(f)}{\mathcal{P}_S(f)+\mathcal{P}_N(f)}$.

b Då det sammanlagda filtret är optimalt måste SNR ta motsv. optimala värde. Detta har i Övning 8.23 beräknats till $\int \mathcal{P}_S(f)\, df \,/ \int \frac{\mathcal{P}_S(f)\mathcal{P}_N(f)}{\mathcal{P}_S(f)+\mathcal{P}_N(f)}\, df$.

Uppgift 6 - Projekt 1 **a** Den stokastiska variabeln `-2*log(1-runif(1))` är $\exp(\frac{1}{2})$-fördelad, och programmet beräknar antalet X och Y oberoende sådana variabler som ryms inom ett intevall av längd fem respektive tio. Mao. är X och Y värdena $X(5)$ och $X(10)$ för en Poisson process med intensitet $\frac{1}{2}$.

b Med sannolikhet p behöver en kund ej vänta på betjäning, medan med sannolikhet $1-p$ kunden får vänta och väntetiden är då $\exp(\lambda)$-fördelad.

Låt ξ_1 och ξ_2 vara oberoende slumptal och simulera Y enligt

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad \xi_1 \in (0,p] \\ -\lambda^{-1}\log(1-\xi_2) & \text{om} \quad \xi_1 \in (p,1) \end{cases}.$$

c Se det andra lösningsalternativet till motsv. uppgift tentamen 991215.

Uppgift 6 - Projekt 2 Se lösningen till motsv. uppgift tentamen 991215.