Tentamen i Stokastiska Processer E den 13/12 2000 kl. 8^{45}-13^{45}

Jour och Lärare: P. Albin 772 3512.

Hjälpmedel: Kompendiet "Albin: Stokastiska Processer för Teknisk Högskola" (oktober 2000 eller tidigare version), rättningsstencil till kompendiet, boken "Leon-Garcia: Probability and Random Processes for Electrical Engineering", Beta, föreläsningsanteckningar [blad 1-10 (föreläsning 1-10) maskinskrivna i år, blad 24-32 (föreläsning 11-14) handskrivna förra året], projektstenciler "simulering av stokastiska processer" och "analys och simulering av ett digitalt kommunikationssystem".

Övningstentamen ger bonus vid examination enligt principen

$$\begin{aligned} &\text{slutpoäng på Uppgift } i \text{ vid examination} \\ &\quad = \max\big\{\text{poäng på Uppgift } i \text{ vid övningstentamen 001201}, \\ &\qquad\qquad \text{poäng på Uppgift } i \text{ vid denna tentamen}\big\} \qquad \text{för} \quad i = 1,2. \end{aligned}$$

Övningstentamen ger ej bonus vid senare omtentamina.

Kursutvärdering bifogas tentamen. De som lämnar kursutvärdering får alla betygsgränser sänkta med 0.3 poäng. Utvärderingen kan lämnas in tillsammans med tentamen. Då skall namntalongen ej fyllas i! (Utvärdering kan inte lämnas till tentamensvakter i efterhand, ty detta kan störa andra tentander.) Utvärdering kan även lämnas i SNE's E3-fack senast måndag 18/12 kl. 10. Då skall namntalongen fyllas i (som SNE avskiljer och ger till Patrik Albin för registrering av bonus).

Det meddelas via `email` när tentamensresultatet är klart och har anslagits.

Uppgift 6: Det finns en Uppgift 6 avsedd för elever som gjort projekt 1, och en avsedd för dem som gjort projekt 2. Tentanden skall endast lämna lösning till en av dessa uppgifter. (Om lösning lämnas till båda beaktas enbart den mest lätträttade lösningen vid examination.) Uppgift 6 bedöms som godkänd eller underkänd, varvid godkänt svarar mot en 40-procentig insats jämfört en perfekt lösning.

Uppgift 1 **a** En svagt stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med diskret tid har spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi fk}\, r_X(k) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi f) = 1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{i2\pi f} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i2\pi f}$. Bestäm z-transformen $S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k\, r_X(k)$ av processens kovariansfunktion (kvf.) $r_X(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\}$. **(1.25 poäng)**

b Två svagt stationära stationärt korrelerade stokastiska processer $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$

och $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med diskret tid har korsspektraltäthet $\mathcal{P}_{X,Y}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi fk}$ $r_{X,Y}(k) = 1+\frac{1}{2}\cos(2\pi f) = 1+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{i2\pi f}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i2\pi f}$. Bestäm korskovariansen $r_{X,Y}(1)$ $= \mathbf{Cov}\{X(t),Y(t{+}1)\}$. **(1.25 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ En svagt stationär stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med diskret tid har kovariansfunktion (kvf.) $r_X(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t),X(t{+}\tau)\} = 1+\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau) = 1+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{i2\pi\tau}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i2\pi\tau}$. Visa att processens kvf. har spektralframställning $r_X(\tau) = \frac{3}{2}\mathbf{E}\{\mathrm{e}^{i2\pi\Theta\tau}\}$ där Θ är en s.v. vars möjliga värden är $\{-1,0,1\}$ som antages med sannolikheterna $\mathbf{P}\{\Theta{=}0\} = \frac{2}{3}$ och $\mathbf{P}\{\Theta{=}\pm1\} = \frac{1}{6}$. **(1.25 poäng)**

$\boxed{\mathbf{d}}$ Två svagt stationära stationärt korrelerade stokastiska processer $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ och $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med diskret tid har korskovariansfunktion (korskvf.) $r_{X,Y}(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t),Y(t{+}\tau)\} = 1+\frac{1}{2}\cos(\pi\tau)+\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{2}\pi\tau) = 1+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{i\pi\tau}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i\pi\tau}+\frac{1}{8i}\mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\pi\tau}-\frac{1}{8i}\mathrm{e}^{-i\frac{1}{2}\pi\tau}$. Bestäm konstanterna $A,B,C,D,E\in\mathbb{C}$ så att processens korskvf. har korsspektraltäthet $\mathcal{P}_{X,Y}(f) = A\,\delta(f)+B\,\delta(f{+}\frac{1}{2})+C\,\delta(f{-}\frac{1}{2})+D\,\delta(f{+}\frac{1}{4})+E\,\delta(f{-}\frac{1}{4})$, där $\delta(x)$ är Dirac's delta-funktion. **(1.25 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 2}}$ Låt ξ och η vara okorrelerade N$(0,1)$-fördelade s.v. och definiera en stokastisk process $\{X(t)\}_{t>0}$ genom att sätta $X(t) = \sqrt{t}\,\big(\xi\cos[2\pi\ln(t)] + \eta\sin[2\pi\ln(t)]\big)$ för $t>0$.

$\boxed{\mathbf{a}}$ Förklara med ord varför denna process inte kan vara stationär eller svagt stationär. Det är inte meningen att man skall använda uttrycket för kovariansfunktionen i Uppgift 2.b nedan, utan man skall resonera utgående från processens definition ovan, och utan att göra några beräkningar. **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ Visa att processen $X(t)$'s kovariansfunktion (kvf.) $r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s),X(t)\}$ ges av $r_X(s,t) = \sqrt{st}\,\cos[2\pi(\ln(t)-\ln(s))] = \sqrt{st}\,\cos[2\pi\ln(t/s)]$. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Avgör om processen $X(t)$ är självsimilär. Avgör mao. om det finns en konstant $\kappa>0$ (som inte får bero på λ nedan) sådan att

$$\big(X(\lambda t_1),\ldots,X(\lambda t_n)\big) =_{\text{fördelning}} \big(\lambda^\kappa X(t_1),\ldots,\lambda^\kappa X(t_n)\big)$$

för varje val av talet $\lambda>0$ och ett antal tider $t_1,\ldots,t_n>0$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 3}}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ I ett signalbehandlingssammanhang vet man av erfarenhet att en svagt stationär tidsdiskret process (signal) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ beskrivs av en MA(2)-process $X(t) = e(t)+\frac{1}{2}e(t-1)+c_2 e(t-2)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus med varians

$\sigma^2 = 1$. (Koefficienten $c_2 \in \mathbb{R}$ är alltså ej känd.) Hur kan man mha. observerade signaldata $X(1), \ldots, X(n)$ skatta (anpassa) koefficienten c_2? **(2.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ I ett signalbehandlingssammanhang vet man av erfarenhet att en svagt stationär tidsdiskret process (signal) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ beskrivs av en AR(2)-process $e(t) = X(t)+\frac{1}{2}X(t-1)+a_2X(t-2)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus med varians $\sigma^2 = 1$. (Koefficienten $a_2 \in \mathbb{R}$ är alltså ej känd.) Hur kan man mha. observerade signaldata $X(1), \ldots, X(n)$ skatta (anpassa) koefficienten a_2? **(2.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 4}}$ Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara en svagt stationär stokastisk process med kontinuerlig tid vars spektraltäthet är $\mathcal{P}_X(f) = \mathrm{e}^{-2|f|}$ för $f \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{a}}$ Är den givna informationen $[\mathcal{P}_X(f)]$ tillräcklig för att kunna bestämma sannolikheten $\mathbf{P}\{X(1)>0\}$ om $X(t)$ är en Gaussisk process? Svaret skall motiveras! (Sannolikheten behöver ej beräknas även om det går.) **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ Är den givna informationen $[\mathcal{P}_X(f)]$ tillräcklig för att kunna bestämma sannolikheten $\mathbf{P}\{X(1)-X(2)>0\}$ om $X(t)$ är en Gaussisk process? Svaret skall motiveras! (Sannolikheten behöver ej beräknas även om det går.) **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Är den givna informationen $[\mathcal{P}_X(f)]$ tillräcklig för att kunna bestämma andramomentfunktionen (amf.) $R_X(\tau) = \mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\}$ om $X(t)$ är en hagelbrusprocess $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(t-\sum_{j=1}^{k}\xi_j) + \sum_{k=1}^{\infty} g(t+\sum_{j=1}^{k}\eta_j)$ där funktionen g är symmetrisk och $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ är obereonde exp(1)-fördelade s.v.? Svaret skall motiveras! (Amf. behöver ej beräknas även om det går.) **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{d}}$ Är den givna informationen $[\mathcal{P}_X(f)]$ tillräcklig för att kunna bestämma variansen $\mathbf{Var}\{X(1)+X(2)\}$? Svaret skall motiveras! (Variansen behöver ej beräknas även om det går.) **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{e}}$ I denna deluppgift är <u>inte</u> längre $\mathcal{P}_X(f) = \mathrm{e}^{-2|f|}$: En teknolog föredrar att beräkna spektraltätheter med formeln $\mathcal{P}_X^{\text{tekn}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ift}\, r_X(t)\, dt$ [där $r_X(t)$ är processen $X(t)$'s kovariansfunktion (kvf.)]. Ange ett allmänt samband mellan teknologens spektraltäthet $\mathcal{P}_X^{\text{tekn}}(f)$ och den spektraltäthet som användes i kursen $\mathcal{P}_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi ft}\, r_X(t)\, dt$. [Sambandet skall anges mha. enbart funktionerna $\mathcal{P}_X^{\text{tekn}}$ och $\mathcal{P}_X$, och funktionen r_X skall ej användas ("synas").] **(1 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 5}}$ Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara diskret vitt brus med varians σ^2. Signalen $S(t) = e(t)+e(t-1)$, $t \in \mathbb{Z}$, sänds på en brusig kanal [där alltså $e(t)$ är det diskreta vita bruset ovan]. Bruset på kanalen är additivt och ges av $N(t) = e(t) + \frac{1}{2}e(t-1)$ för $t \in \mathbb{Z}$ [där $e(t)$ fortfarande är det diskreta vita bruset ovan (samma diskreta brus, inte ett annat)]. Notera att bruset $N(t)$ och signalen $S(t)$ inte är oberoende (okorrelerade). För en mottagare ges den observerbara signalen $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ av $X(t) = S(t) + N(t)$ för $t \in \mathbb{Z}$. Man önskar filtrera den mottagna signalen $X(t)$ i ett tidsdiskret filter med (summerbart) impulssvar $h(k)$, så att utsignalen från filtret $Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(t-k)$, $t \in \mathbb{Z}$, liknar den sända signalen $S(t)$ väl i meningen att avståndet $\mathbf{E}\{(Y(t)-S(t))^2\}$ är litet.

$\boxed{\text{a}}$ Förklara varför det kan vara rimligt att, åtminstone som en första ansats, välja ett impulssvar sådant att $h(k) = 0$ då $k \notin \{-1, 0, 1\}$. Förklara också varför man inte utan vidare kan utgå från att ett sådant impulssvar (filter) är optimalt [dvs. minimerar $\mathbf{E}\{(Y(t)-S(t))^2\}$]. **(1 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Bestäm det impulssvar $h(k)$ med $h(k) = 0$ för $k \notin \{-1, 0, 1\}$ som minimerar $\mathbf{E}\{(Y(t)-S(t))^2\}$. **(2 poäng)**

$\boxed{\text{c}}$ Ange linjära ekvationssystem som bestämmer det impulssvar $h(k)$ som minimerar $\mathbf{E}\{(Y(t)-S(t))^2\}$ då man inte längre pålägger restriktionen $h(k) = 0$ för $k \notin \{-1, 0, 1\}$. Notera att man kan skriva $Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2h(k) + \frac{3}{2}h(k-1)]e(t-k)$. [Ekvationerna som bestämmer $h(k)$ behöver inte lösas. Och man behöver inte visa att lösningen till ekvationerna existerar eller är summerbar (etc.).] **(2 poäng)**

Uppgift 6 - Projekt 1 $\boxed{\text{a}}$ En s.v. ξ har fördelningsfunktion $F_\xi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ för $x \in \mathbb{R}$. Skriv (ej nödvändigtvis "verklig") programkod eller ett flödesschema för att beräkna ett (approximativt) 95% konfidensintervall för väntevärdet $\mu = \mathbf{E}\{\xi\}$ vars bredd är cirka 0.002. Beräkningen skall ske genom att mha. simulering skapa ett antal oberoende s.v. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ med samma fördelning som ξ, och sedan utnyttja dessa till att beräkna intervallet. Skatta den nödvändiga stickprovsstorleken n mha. en inledande preliminär simulering. **(2.5 poäng)**

Anm: Fördelningen $F(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ kallas extremvärdesfördelning, Gumbel fördelning, eller dubbel exponential fördelning. Dess väntevärde kan inte uttryckas explicit (mha. elementära funktioner o.dyl.).

$\boxed{\text{b}}$ Skriv (ej nödvändigtvis "verklig") programkod eller ett flödesschema för att mha. simulering skatta sannolikheten $p = \mathbf{P}\{\max_{t\in\{0,\ldots,10\}} X(t) > 5\}$ för en MA(2)-process $X(t) = e(t) + e(t-1) + e(t-2)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är Gaussiskt diskret vitt brus med varians $\sigma^2 = 1$. Hur kan man på förväg bestämma ett n sådant att

n stycken oberoende simulerade observationer av $\max_{t\in\{0,\ldots,10\}} X(t)$ (och därmed sammanhängande avgöranden av huruvida denna når över 5 eller ej) resulterar i ett (approximativt) 95% konfidensintervall av bredd högst 0.002? **(2.5 poäng)**

Uppgift 6 - Projekt 2 **a** Det gäller samma förutsättningar som i projektet, förutom att brusets kovariansfunktion $r_W(\tau)$ nu har viss "utbredning", och närmre bestämt ges av en hög smal "δ-funktionsliknande" triangelform

$$r_W(\tau) = \begin{cases} n\,(1-|n\tau|) & \text{för } |\tau|\le 1/n \\ 0 & \text{för } |\tau|>1/n \end{cases} \qquad \left(\text{spektraltäthet } \frac{n^2\,[1-\cos(2\pi f/n)]}{2\pi^2 f^2}\right).$$

[Notera att arean under grafen av $r_W(\tau)$ är 1, och att spektraltätheten approximativt är 1 då f är litet jämfört med n (Taylor-utveckla).] Beräkna bitfelssannolikheten $P_b = \mathbf{P}\{N(m) > \sqrt{E}\}$ då detta annorlunda brus (än i projektet) adderas till den sända signalen. (Samma filter som i projektet användes.) **(2.5 poäng)**

b Antag att (i projektets terminologi) $N_0/2 = T = 1$. Det impulssvar $h(u) = 1$ för $u\in[0,1]$ och $h(u)=0$ för övrigt som användes i projektet löser det signalanpassade filtrets ekvation $s(m+1-u) = (h\star r_W)(u) = h(u)$, då signalformen $s(t)$ ges av $s(t)=1$ för $t\in[m,m+1]$ och $s(t)=0$ för övrigt [och man sänder $\pm s(t)$].

Ändra nu förutsättningarna i projektet på så vis att för det första en annan sig- nalform än "en etta" användes, så att man istället sänder (plus/minus) en (känd) signalform $s(t)$ som "lever" (är skild från noll) för $t \in [m, m+1]$ och $s(t)=0$ för övrigt. Utnyttja för det andra en "verklig" (svagt stationär) brusprocess $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ (med väntevärde 0) som observerats (då ingen signal sändes) och lagrats i datafil. Förklara hur man nu (mha. av lämpliga skattningsprocedurer) kan utnyttja det lagrade bruset till att skatta ett lämpligt impulssvar $h(u)$ att använda i denna förändrade situation. Ange också hur man mha. det inspelade bruset $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ kan skatta bitfelssannolikheten P_b (då det skattade lämpliga impulssvaret användes). **(2.5 poäng)**

Ledning: För en svagt stationär process $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med väntevärde $m_W=0$ kan man skatta kovariansfunktionen $r_W(\tau)$ mha. $\hat{r}_W(\tau) = \frac{1}{n}\int_0^{n-|\tau|} W(t)W(t+|\tau|)\,dt$.

LYCKA TILL!

$\boxed{\textbf{Uppgift 1}}$ $\boxed{\textbf{a}}$ Eftersom $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi fk} r_X(k) = 1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{i2\pi f} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i2\pi f}$, så är $r_X(0)=1$, $r_X(\pm 1)=\frac{1}{4}$ och $r_X(k)=0$ f.ö., så att $S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k r_X(k) = 1+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^{-1}$.

$\boxed{\textbf{b}}$ Eftersom $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi fk} r_{X,Y}(k) = 1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{i2\pi f} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i2\pi f}$, så är $r_{X,Y}(0)=1$, $r_{X,Y}(\pm 1)=\frac{1}{4}$ och $r_{X,Y}(k)=0$ f.ö., så att $r_{X,Y}(1) = \mathbf{Cov}\{X(t), Y(t+1)\} = \frac{1}{4}$.

$\boxed{\textbf{c}}$ Enligt formeln för väntevärde av en funktion av en diskret s.v. är $\frac{3}{2}\mathbf{E}\{\mathrm{e}^{i2\pi\Theta\tau}\}$ $= \frac{3}{2}\big(\sum_{k\in\{-1,0,1\}} \mathrm{e}^{i2\pi k\tau}\,\mathbf{P}\{\Theta=k\}\big) = \frac{3}{2}\big(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{i2\pi f}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-i2\pi f}\big) = 1+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{i2\pi f}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i2\pi f}$ $= r_X(\tau)$.

$\boxed{\textbf{d}}$ Allmänt gäller att $r_{X,Y}(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\,\mathcal{P}_{X,Y}(f)\,df$. Med det ansatta uttrycket för $\mathcal{P}_{X,Y}(f)$ blir $\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\,\mathcal{P}_{X,Y}(f)\,df = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\,[A\,\delta(f)+B\,\delta(f+\frac{1}{2})+C\,\delta(f-\frac{1}{2})+D\,\delta(f+\frac{1}{4})+E\,\delta(f-\frac{1}{4})]\,df = A+B\,\mathrm{e}^{-i\pi\tau}+C\,\mathrm{e}^{i\pi\tau}+D\mathrm{e}^{-i\frac{1}{2}\pi\tau}+E\,\mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\pi\tau} = r_{X,Y}(\tau)$ om $A=1$, $B=C=\frac{1}{4}$, $D=-\frac{1}{8i}$ och $E=\frac{1}{8i}$.

$\boxed{\textbf{Uppgift 2}}$ $\boxed{\textbf{a}}$ Då t växer från 0 till ∞ kommer cos- och sin-uttrycken att oscillera mellan 0 och 1, och deras storlek har ingen systematisk förändring då tiden växer. Däremot växer faktorn $\sqrt{t}$ hela tiden, och gör att processen $X(t)$'s amplitud blir allt större då t växer. Men så beter sig inte en stationär process, som måste ha samma fördelning (statistiska egenskaper) i varje tidpunkt. Eftersom processen är Gaussisk och icke-stationär, så är den inte heller svagt stationär.

$\boxed{\textbf{b}}$ Enligt Exempel 3.4 i kompendiet är processen $Y(t) = \xi\cos(2\pi t)+\eta\sin(2\pi t)$ svagt stationär med kvf. $r_Y(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y(t), Y(t+\tau)\} = \cos(2\pi\tau)$. Det följer att $r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = \mathbf{Cov}\{\sqrt{s}\,Y(\ln(s)), \sqrt{t}\,Y(\ln(t))\} = \sqrt{st}\,r_Y(\ln(t)-\ln(s)) = \sqrt{st}\,\cos[2\pi(\ln(t)-\ln(s))] = \sqrt{st}\,\cos[2\pi\ln(t/s)]$.

$\boxed{\textbf{c}}$ Eftersom $X(t)$ är Gaussisk så har processerna $\{X(\lambda t)\}_{t\geq 0}$ och $\{\lambda^\kappa X(t)\}_{t\geq 0}$ samma ändligtdimensionella fördelningar om och endast om de har samma väntevärdes- och kovariansfunktioner (vvf. och kvf.). Det är klart att vvf. för båda processerna är lika med noll. Kvf. för den första processen är $\mathbf{Cov}\{X(\lambda s), X(\lambda t)\} = r_X(\lambda s, \lambda t) = \lambda\sqrt{st}\,\cos[2\pi\ln(t/s)]$. Kvf. för den andra processen är $\mathbf{Cov}\{\lambda^\kappa X(s), \lambda^\kappa X(t)\} = \lambda^{2\kappa} r_X(s,t) = \lambda^{2\kappa}\sqrt{st}\,\cos[2\pi\ln(t/s)]$. Processernas kvf. är alltså lika då $\kappa=\frac{1}{2}$, och den ursprungliga processen $X(t)$ sådeles självsimilär med index $\kappa=\frac{1}{2}$.

Uppgift 3 **a** Det gäller att $r_X(1) = \sigma^2(c_0c_1+c_1c_2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}c_2$, så att $c_2 = 2r_X(1)–1$. Här kan $r_X(1)$ skattas mha. av observationerna $r_X^\star(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(X(k) - m_X)(X(k+1)-m_X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} X(k)X(k+1)$, vilket ger c_2-skattningen $c_2^\star = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} X(k)X(k+1)-1$. [Om man istället använder $r_X(0)$, så erhålles ett uttryck där c_2^2 (inte c_2) ingår, och man kan därför inte bestämma tecknet för c_2.]

b Enligt Yule-Walker ekvationerna är $r_X(0)+a_1r_X(1)+a_2r_X(2) = \sigma^2$, dvs. $r_X(0)+\frac{1}{2}r_X(1)+a_2r_X(2) = 1$, så att $a_2 = \big(1-r_X(0)-\frac{1}{2}r_X(1)\big)/r_X(2)$. Här kan $r_X(0)$, $r_X(1)$ och $r_X(2)$ skattas $r_X^\star(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X(k)^2$, $r_X^\star(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} X(k) X(k+1)$ och $r_X^\star(2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} X(k)X(k+2)$, vilket ger a_2-skattningen $a_2^\star = \big(1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X(k)^2 - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} X(k)X(k+1)\big)\,/\,\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} X(k)X(k+2)\big)$.

Uppgift 4 **a** Nej: Att känna spektraltätheten $\mathcal{P}_X(f)$ är ekvivalent med att känna kvf. $r_X(\tau)$, men $\mathbf{P}\{X(1)>0\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(m_X, r_X(0))>0\} = 1-\mathbf{P}\{\mathrm{N}(m_X, r_X(0))\le 0\} = 1-\Phi\big(\frac{0-m_X}{r_X(0)}\big)$ är ej bestämd av $r_X(\tau)$.

b Ja: $\mathbf{P}\{X(1)-X(2)>0\} = \mathbf{P}\big\{\mathrm{N}\big(\mathbf{E}\{X(1)-X(2)\}, \mathbf{Var}\{X(1)-X(2)\}\big)>0\big\} = \mathbf{P}\big\{\mathrm{N}\big(m_X-m_X, 2(r_X(0)-r_X(1))\big)>0\big\} = 1-\mathbf{P}\big\{\mathrm{N}\big(0, 2(r_X(0)-r_X(1))\big)\le 0\big\} = 1 -\Phi\big(\frac{0-0}{2(r_X(0)-r_X(1))}\big) = \frac{1}{2}$ om $2(r_X(0)-r_X(1)) > 0$ [dvs. $r_X(0)\neq r_X(1)$], och $\mathbf{P}\{X(1)-X(2)>0\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(0,0)>0\} = \mathbf{P}\{0>0\} = 0$ om $2(r_X(0)-r_X(1)) = 0$.

c Nej: Enligt Exempel 6.4 är $\mathcal{P}_X(f) = \lambda\,|(\mathfrak{F}g)(f)|^2 = [(\mathfrak{F}g)(f)]^2$, ty $\lambda = 1$ och $(\mathfrak{F}g)(f)$ är reell (då g är symmetrisk). Å andra sidan är $R_X(0) = r_X(0)+m_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_X(f)\,df+[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx]^2$. Vi känner ej tecknet för $(\mathfrak{F}g)(f)$, och kan därför inte beräkna $g(x)$ mha. inverstransformation. Tex. är $(\mathfrak{F}g)(f) = \mathrm{e}^{-|f|}$ för $|f|\le 1$ och $(\mathfrak{F}g)(f) = -\mathrm{e}^{-|f|}$ för $|f|>1$ lika möjligt som $(\mathfrak{F}g)(f) = \mathrm{e}^{-|f|}$ för $f\in\mathbb{R}$. Och dessa båda olika transformer har olika inverstransformer $g(x)$ $[\frac{2-2\mathrm{e}^{-1}\cos(2\pi x)+4\pi x\mathrm{e}^{-1}\sin(2\pi x)}{1+4\pi^2x^2}$ resp. $\frac{1}{1+4\pi^2x^2}]$, med olika värden för $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$.

d Ja: $\mathbf{Var}\{X(1)+X(2)\} = \mathbf{Var}\{X(1)\}+\mathbf{Var}\{X(2)\}+2\,\mathbf{Cov}\{X(1),X(2)\} = 2r_X(0)+2r_X(1)) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_X(f)\,df+2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi f}\,\mathcal{P}_X(f)\,df$.

e $\mathcal{P}_X^{\mathrm{tekn}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ift}\,r_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi\,(-f/(2\pi))\,t}\,r_X(t)\,dt = \mathcal{P}_X(-f/(2\pi))$ $[=\mathcal{P}_X(f/(2\pi))$ eftersom spektraltätheter är symmetriska].

Uppgift 5 **a** Termer i utsignalen från filtret $Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,[2e(t-k)+\frac{3}{2}e(t-k-1)]$ svarande mot filterkoefficienter $h(k)$ med $k\notin\{-1,0,1\}$ är okorrelerade med signalen $S(t) = e(t)+e(t-1)$, och kan därför inte vara viktiga då man skall "återskapa" $S(t)$. Men eftersom termer i utsignalen

$Y(t)$ svarande mot filterkoefficienter $h(\pm 1)$ är korrelerade med de med koefficienter $h(\pm 2)$, som är korrelerade med de med koefficienter $h(\pm 3)$, etc., så kan man inte vara säker på att det bästa filtret verkligen har $h(k)=0$ då $k\notin\{-1,0,1\}$.

b $\mathbf{E}\{(Y(t)-S(t))^2\} = \mathbf{Var}\{Y(t)-S(t)\} = \mathbf{Var}\big\{h(0)[2e(t)+\frac{3}{2}e(t-1)]+h(1)[2e(t-1)+\frac{3}{2}e(t-2)]+h(-1)[2e(t+1)+\frac{3}{2}e(t)]-[e(t)+e(t-1)]\big\} = \mathbf{Var}\big\{\frac{3}{2}h(1)e(t-2)+[\frac{3}{2}h(0)+2h(1)-1]e(t-1)+[2h(0)+\frac{3}{2}h(-1)-1]e(t)+2h(-1)e(t+1)\big\} = \frac{9}{4}h(1)^2\sigma^2+[\frac{3}{2}h(0)+2h(1)-1]^2\sigma^2+[2h(0)+\frac{3}{2}h(-1)-1]^2\sigma^2+4h(-1)^2\sigma^2$. Då vi sätter derivatorna av detta map. $h(0)$ och $h(\pm 1)$ till noll erhålles ekvationerna $3[\frac{3}{2}h(0)+2h(1)-1]+4[2h(0)+\frac{3}{2}h(-1)-1] = \frac{9}{2}h(1)+4[\frac{3}{2}h(0)+2h(1)-1] = 3[2h(0)+\frac{3}{2}h(-1)-1]+8h(-1) = 0$, med lösning $h(-1) = -\frac{162}{8425}$, $h(0) = \frac{182}{337}$ och $h(1) = \frac{512}{8425}$ (om jag räknade rätt).

c $\mathbf{E}\{(Y(t)-S(t))^2\} = \mathbf{Var}\{Y(t)-S(t)\} = \mathbf{Var}\big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}[2h(k)+\frac{3}{2}h(k-1)]e(t-k)-[e(t)+e(t-1)]\big\} = \mathbf{Var}\big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}[2h(k)+\frac{3}{2}h(k-1)]e(t-k)\big\} + \mathbf{Var}\{e(t)+e(t-1)\} - 2\,\mathbf{Cov}\big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}[2h(k)+\frac{3}{2}h(k-1)]e(t-k), e(t)+e(t-1)\big\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[2h(k)+\frac{3}{2}h(k-1)]^2\sigma^2+2\sigma^2-2\big([2h(0)+\frac{3}{2}h(-1)]+[2h(1)+\frac{3}{2}h(0)]\big)\sigma^2 = \frac{25}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)^2\sigma^2+6\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)h(k-1)\sigma^2+2\sigma^2-\big(7h(0)+3h(-1)+4h(1)\big)\sigma^2$. Då vi sätter derivatorna av detta map. $h(k)$ för $k\in\mathbb{Z}$ till noll erhålles ekvationerna $\frac{25}{2}h(k)+6[h(k+1)+h(k-1)] = 0$ för $k\notin\{-1,0,1\}$, medan $\frac{25}{2}h(1)+6[h(2)+h(0)] = 4$, $\frac{25}{2}h(0)+6[h(1)+h(-1)] = 7$ och $\frac{25}{2}h(-1)+6[h(0)+h(-2)] = 3$.

Uppgift 6 - Projekt 1 **a** Detta kan man då man gjort projektet ordentligt.

b Detta kan man då man gjort projektet ordentligt.

Uppgift 6 - Projekt 2 **a** Detta kan man då man gjort projektet ordentligt.

b Detta kan man då man gjort projektet ordentligt.