Tentamen i Stokastiska Processer E den 18/4 2001 kl. 14^{15}-19^{15}

Jour och Lärare: P. Albin 772 3512.

Hjälpmedel: Kompendium "Albin: Stokastiska Processer för Teknisk Högskola", rättningsstencil till kompendium, bok "Leon-Garcia: Probability and Random Processes for Electrical Engineering", Beta, föreläsningsanteckningar [blad 1-10 (föreläsning 1-10) maskinskrivna, blad 24-32 (föreläsning 11-14) handskrivna], projektstenciler "simulering av ..." och "analys och simulering av ...".

Övningstentamen ger ej bonus vid denna tentamen.

Uppgift 6: Det finns en Uppgift 6 avsedd för elever som gjort projekt 1, och en för dem som gjort projekt 2. Lösning skall endast lämnas till en av dessa uppgifter.

Uppgift 1 Svaren till följande deluppgifter skall åtföljas av en kort motivering:

a Rita en ("typisk") realisering av $\{X(t)-t\}_{t\in[0,10]}$, då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poisson process med intensitet 1. **(1 poäng)**

b Rita en realisering av $\{X(t)\}_{t\in[0,10]}$, då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Gaussisk process med väntevärde noll och kovariansfunktion $r_X(s,t) = \min\{s^2,t^2\}$. **(1 poäng)**

c Rita en realisering av $\{X(t)\}_{t\in[0,10]}$, då $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är en Gaussisk process med väntevärdesfunktion $m_X(t)=t$ och kovariansfunktion $r_X(s,t)=1$ för $s=t$ och $r_X(s,t)=0$ för övrigt. **(1 poäng)**

d Rita en realisering av $\{X(t)-t\}_{t\in[0,10]}$, då $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är en MA(2)-process given av $X(t) = e(t)+e(t-1)+e(t-2)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus sådant att varje $e(t)$ är likformigt fördelat över intervallet $[-1,1]$. **(1 poäng)**

e Rita en realisering av $\{X(t)\}_{t\in[0,10]}$, då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévy process. **(1 poäng)**

Uppgift 2 Svaren till följande deluppgifter skall åtföljas av en kort motivering:

a En stokastisk process har precis tre av följande fyra egenskaper: Den är (1) en Lévy process, (2) en Gaussisk process, (3) en själv-similär process, (4) en svagt stationär process. Vilken process är det? **(1.5 poäng)**

b En stokastisk process har precis tre av följande fyra egenskaper: Den är (1) en Lévy process, (2) en Gaussisk process, (3) en MA-process, (4) en svagt stationär process. Ange processens väntevärdesfunktion. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Kan en stokastisk process ha precis tre av följande fyra egenskaper: Den är (1) en Lévy process, (2) en Poisson process, (3) en själv-similär process, (4) en svagt stationär process. Kan en process ha alla fyra egenskaperna? **(2 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 3}}$ Följande deluppgifter löses lämpligen mha. betingning:

$\boxed{\mathbf{a}}$ Låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Wiener process och $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en icke-negativa stokastisk process som är oberoende av W. Bestäm $\mathbf{E}\{W(X(t))\}$. **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ Låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Wiener process och $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ en Poisson process med intensitet 1 som är oberoende av W. Bestäm $\mathbf{E}\{W(N(t))^2\}$. **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Låt $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poisson process med intensitet 1 och $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en svagt stationär process med kovariansfunktion $r_X(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ som är oberoende av N. Bestäm $\mathbf{Cov}\{X(N(s)), X(N(t))\}$. **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{d}}$ Låt $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poisson process med intensitet 1. Bestäm $\mathbf{E}\{N(N(t))\}$ för $t\in(0,1)$. **(2 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 4}}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ För en funktion $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ har fem transformer beräknats:

$$\int_0^\infty \sin(fx)\, g(x)\, dx, \quad \int_0^\infty \cos(fx)\, g(x)\, dx, \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-fx} g(x)\, dx, \quad \int_0^\infty f^x g(x)\, dx, \quad \int_0^\infty x^f g(x)\, dx.$$

Para ihop dessa transformer med följande resultat (som står i fel ordning):

$$\frac{1}{1+f}, \quad \frac{1}{1-\ln(f)}, \quad \Gamma(f+1), \quad \frac{1}{1+f^2}, \quad \frac{f}{1+f^2}. \qquad \textbf{(2 poäng)}$$

$\boxed{\mathbf{b}}$ Definiera en Fourier transform $(\mathbb{F}g)(f)$ för funktioner $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ enligt

$$\hat{g}(f) = (\mathbb{F}g)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i19\pi fx} g(x)\, dx \qquad \text{för} \quad f\in\mathbb{R}.$$

Visa att motsvarande inverstransform ges av

$$g(x) = (\mathbb{F}^{-1}\hat{g})(x) = 9.5 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i19\pi fx}\, \hat{g}(f)\, df \qquad \text{för} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Ange ett samband mellan $(\mathbb{F}g)(x)$ och $(\mathbb{F}^{-1}(\mathbb{F}^{-1}(\mathbb{F}^{-1}g)))(x)$. **(3 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 5}}$ Slutkurserna (sista köpkursen under dagen) $X_{-99},\ldots,X_0$ för en viss aktie under 100 konsekutiva (på varandra följande) dagar med börshandel har observerats (där X_0 är den senaste observationen). Beskriv explicit hur nästa slutkurs X_1 kan skattas mha. datamaterialet. Ange de antaganden skattningen baseras på. Går det att ange en osäkerhet för skattningen? **(5 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 6 - Projekt 1}}$ $\boxed{\text{a}}$ En s.v. ξ har fördelningsfunktion $F_\xi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ för $x \in \mathbb{R}$. Skriv programkod eller ett flödesschema för att beräkna ett approximativt 95% konfidensintervall för väntevärdet $\mu = \mathbf{E}\{\xi\}$ vars bredd är cirka 0.002. Beräkningen skall ske genom att simulera ett antal oberoende s.v. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ med samma fördelning som ξ, och mha. dessa beräkna intervallet. Skatta nödvändig stickprovsstorlek n mha. en inledande preliminär simulering. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Skriv programkod eller ett flödesschema för att mha. simulering skatta sannolikheten $p = \mathbf{P}\{\max_{t\in\{0,\ldots,10\}} X(t) > 5\}$ för en MA(2)-process $X(t) = e(t) + e(t-1) + e(t-2)$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus sådant att varje $e(t)$ är likformigt fördelat över intervallet $[-1, 1]$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 6 - Projekt 2}}$ $\boxed{\text{a}}$ Det gäller samma förutsättningar som i projektet, förutom att brusets kovariansfunktion $r_W(\tau)$ nu har viss "utbredning", och närmre bestämt ges av en hög smal "δ-funktionsliknande" triangelform

$$r_W(\tau) = \begin{cases} n\,(1-|n\tau|) & \text{för } |\tau| \le 1/n \\ 0 & \text{för } |\tau| > 1/n \end{cases} \qquad \left(\text{spektraltäthet} \quad \frac{n^2\,[1-\cos(2\pi f/n)]}{2\pi^2 f^2}\right).$$

Beräkna bitfelssannolikheten $P_b = \mathbf{P}\{N(m) > \sqrt{E}\}$ då detta brus (istf. det i projektet) "stör" den sända signalen. (Samma filter som i projektet!) **(2.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Antag att (i projektets terminologi) $N_0/2 = T = 1$. Det impulssvar $h(u) = 1$ för $u \in [0, 1]$ och $h(u) = 0$ för övrigt som användes i projektet löser det signalanpassade filtrets ekvation $s(m+1-u) = (h \star r_W)(u) = h(u)$, då signalformen $s(t)$ ges av $s(t) = 1$ för $t \in [m, m+1]$ och $s(t) = 0$ för övrigt [och man sänder $\pm s(t)$].

Ändra förutsättningarna i projektet så att istället för (plus/minus) "en etta", man använder (plus/minus) en annan (känd) signalform $s(t)$ som "lever" (är skild från noll) för $t \in [m, m+1]$ och $s(t) = 0$ för övrigt. Utnyttja vidare ett "verkligt" svagt stationärt brus $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med väntevärde 0, som observerats då ingen signal sändes, och lagrats i datafil. Ange hur (mha. det lagrade bruset) ett lämpligt impulssvar $h(u)$ att använda i denna förändrade situation kan skattas. Beskriv hur bitfelssannolikheten P_b kan skattas [då detta $h(u)$ användes]. **(2.5 poäng)**

LYCKA TILL!

Lösningar (Svar) till Tentamen i Stokastiska Processer E den 18/4 2001

Uppgift 2 $\boxed{\text{a}}$ Wiener processen har egenskaperna (1)-(3).

$\boxed{\text{b}}$ En Gaussisk MA-process har egenskaperna (2)-(4), och har väntevärde noll.

$\boxed{\text{c}}$ Nej, resp. ja (nollprocessen har alla fyra egenskaperna).

Uppgift 3 $\boxed{\text{a}}$ För $X(t)$ kontinuerligt fördelad är $\mathbf{E}\{W(X(t))\} = \int_0^\infty \mathbf{E}\{W(X(t))|X(t)=x\} f_{X(t)}(x)\,dx = \int_0^\infty \mathbf{E}\{W(x)\} f_{X(t)}(x)\,dx = \int_0^\infty 0 \cdot f_{X(t)}(x)\,dx = \underline{0}$.

$\boxed{\text{b}}$ $\mathbf{E}\{W(N(t))^2\} = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\{W(N(t))^2|N(t)=k\} f_{N(t)}(k) = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\{W(k)^2\} \times f_{N(t)}(k) = \sum_{k=0}^\infty k f_{N(t)}(k) = \mathbf{E}\{N(t)\} = \underline{t}$.

$\boxed{\text{c}}$ $\mathbf{Cov}\{X(N(s)), X(N(t))\} = \mathbf{E}\{X(N(s))X(N(t))\} - \mathbf{E}\{X(N(s))\}\,\mathbf{E}\{X(N(t))\}$ $= \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\{X(N(s))X(N(t)-N(s)+N(s))|N(t)-N(s)=k\} f_{N(t)-N(s)}(k) - \big(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\{X(N(s))|N(s)=k\} f_{N(s)}(k)\big)\big(\sum_{\ell=0}^\infty \mathbf{E}\{X(N(t))|N(t)=\ell\} f_{N(t)}(\ell)\big) = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\{X(N(s))X(k+N(s))\} f_{N(t-s)}(k) - \big(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\{X(k)\} f_{N(s)}(k)\big)\big(\sum_{\ell=0}^\infty \mathbf{E}\{X(\ell)\} f_{N(t)}(\ell)\big)$ $= \sum_{k=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \mathbf{E}\{X(N(s))X(k+N(s))|N(s)=\ell\} f_{N(t-s)}(k) f_{N(s)}(\ell) - m_X^2 = \sum_{k=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \mathbf{E}\{X(\ell)X(k+\ell)\} f_{N(t-s)}(k) f_{N(s)}(\ell) - m_X^2 = \sum_{k=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \big(r_X(\ell,k+\ell)+m_X^2\big) f_{N(t-s)}(k) f_{N(s)}(\ell) - m_X^2 = \sum_{k=0}^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \mathrm{e}^{-k} f_{N(t-s)}(k) f_{N(s)}(\ell) = \sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-k} f_{N(t-s)}(k) = \mathbf{E}\{\mathrm{e}^{-N(t-s)}\} = \underline{\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{-1}-1)\,(t-s)}}$ för $0<s<t$.

$\boxed{\text{d}}$ $\mathbf{E}\{N(N(t))\} = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\{N(k)|N(t)=k\} f_{N(t)}(k) = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\{N(k)|N(t)=k\} f_{N(t)}(k) = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\{N(k)-N(t)+k|N(t)=k\} f_{N(t)}(k) = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\{N(k)-N(t)+k\} f_{N(t)}(k) = \sum_{k=1}^\infty (k-t+k) f_{N(t)}(k) = 2\sum_{k=0}^\infty k f_{N(t)}(k) - t\sum_{k=1}^\infty f_{N(t)}(k) = 2\,\mathbf{E}\{N(t)\} - t\big(1-f_{N(t)}(0)\big) = t\big(1+f_{N(t)}(0)\big) = \underline{1\big(1+\mathrm{e}^{-t}\big)}$.

Uppgift 4 $\boxed{\text{a}}$ $\int_0^\infty \sin(fx)\,g(x)\,dx = \frac{f}{1+f^2}$, $\int_0^\infty \cos(fx)\,g(x)\,dx = \frac{1}{1+f^2}$, $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-fx} g(x)\,dx = \frac{1}{1+f}$, $\int_0^\infty f^x g(x)\,dx = \frac{1}{1-\ln(f)}$ och $\int_0^\infty x^f g(x)\,dx = \Gamma(f+1)$.

$\boxed{\text{b}}$ Utryckt med kursens Fourier transformpar $(\mathfrak{F}g)(f) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{i2\pi fx} g(x)\,dx$ och $(\mathfrak{F}^{-1}g)(f) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-i2\pi fx} g(f)\,df$, så är $(\mathbb{F}g)(f) = (\mathfrak{F}g)(9.5f)$. Det följer att

$$\begin{aligned}(\mathbb{F}^{-1}(\mathbb{F}g))(x) = g(x) = (\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}g))(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi \hat{f}x}\,(\mathfrak{F}g)(\hat{f})\,d\hat{f}\\ &= 9.5\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i19\pi fx}\,(\mathfrak{F}g)(9.5f)\,df\\ &= 9.5\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i19\pi fx}\,(\mathbb{F}g)(f)\,df.\end{aligned}$$

Eftersom enigt ovan $(\mathbb{F}^{-1}g)(x) = 9.5(\mathbb{F}g)(-x)$, så är vidare

$$\underline{(\mathbb{F}^{-1}(\mathbb{F}^{-1}(\mathbb{F}^{-1}g)))(x)} = 9.5(\mathbb{F}(\mathbb{F}^{-1}(\mathbb{F}^{-1}g)))(-x) = 9.5(\mathbb{F}^{-1}g)(-x) \underline{= (9.5)^2(\mathbb{F}g)(x)}.$$

Uppgift 5 Antag att slutkurserna är observationer av en svagt stationär process $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, med väntevärde m_X och kovariansfunktion $r_X(k)$. Den skattning $X_1^\star = \sum_{k=0}^{99} a_k X_{-k} + b$ som minimerar $\mathbf{E}\{(X_1 - X_1^\star)^2\}$ bestäms av ekvationerna $\sum_{k=0}^{99} a_k r_X(\ell - k - 1) = r_X(\ell)$ för $\ell = 1,\ldots,100$, och $\sum_{k=0}^{99} a_k m_X + b = 0$. Ekvationerna löses approximativt genom att ersätta r_X och m_X med skattningar $r_X^\star$ och $m_X^\star$ beräknade mha. observationerna. Skattningens osäkerhet indikeras av storleken av $\mathbf{E}\{(X_1 - X_1^\star)^2\} = r_X(0) - 2\sum_{k=0}^{99} a_k r_X(k+1) \sum_{k=0}^{99}\sum_{\ell=0}^{99} a_k a_\ell r_X(\ell - k)$, då man sätter in de skattade värdena för a_k och r_X.