Tentamen i Stokastiska Processer E den 20/8 2001 kl. 14^{15}-19^{15}

Lärare: P. Albin 772 3512.

Jour: Ej känd vid tentamens utskrift.

Hjälpmedel: Kompendium "Albin: Stokastiska Processer för Teknisk Högskola", rättningsstencil till kompendium, bok "Leon-Garcia: Probability and Random Processes for Electrical Engineering", Beta, föreläsningsanteckningar [blad 1-10 (föreläsning 1-10) maskinskrivna, blad 24-32 (föreläsning 11-14) handskrivna], projektstenciler "simulering av ..." och "analys och simulering av ...".

Övningstentamen ger ej bonus vid denna tentamen.

Uppgift 6: Det finns en Uppgift 6 avsedd för elever som gjort projekt 1, och en för dem som gjort projekt 2. Lösning skall endast lämnas till en av dessa uppgifter.

Uppgift 1 Svaren till följande deluppgifter skall åtföljas av korta motiveringar:

a Ge ett exempel på en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ som är en självsimilär stationär Lévy process. **(1 poäng)**

b Ge ett exempel på en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ som är en stationär Lévy process, men ej självsimilär. **(1 poäng)**

c Ge ett exempel på en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ som är en självsimilär Lévy process, men ej stationär. **(1 poäng)**

d Ge ett exempel på en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ som är en självsimilär process, men varken stationär eller en Lévy process. **(1 poäng)**

e Ge ett exempel på en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ som är en Lévy process, men varken stationär eller självsimilär. **(1 poäng)**

Uppgift 2 Låt $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ och $\mathfrak{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara kovariansfunktioner för två svagt stationära stokastiska processer $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ respektive $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Antag att r, $\mathfrak{r}$, $r\mathfrak{r}$ (dvs. produkten av kovariansfunktionerna), $r\star\mathfrak{r}$ (dvs. faltningen av kovariansfunktionerna) och $(r\star\mathfrak{r})^2$, samt dessa funktioners Fouriertransformer (inverstransformer) samtliga är integrerbara funktioner. Svaren till följande deluppgifter skall åtföljas av korta motiveringar:

a Är $r+\mathfrak{r}$ en kovariansfunktion? **(1 poäng)**

b Är $r\mathfrak{r}$ en kovariansfunktion? **(1.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Är $r\star\mathfrak{r}$ en kovariansfunktion? **(1.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{d}}$ Är $(r\star\mathfrak{r})^2$ en kovariansfunktion? **(1 poäng)**

Uppgift 3 $\boxed{\mathbf{a}}$ Låt ξ och η vara oberoende $\mathrm{N}(0,1)$-fördelade stokastiska variabler, och sätt $X(t) = \xi\,\cos(2\pi f t) + \eta\,\sin(2\pi f t)$ för $t\in\mathbb{R}$. Visa att processen $Y(t) = t^k X(\ln(t))$, $t\geq 0$, är självsimilär med index k då $k>0$ är en konstant. **(1 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara en (godtycklig) stationär process. Visa att processen $Y(t) = t^k X(\ln(t))$, $t\geq 0$, är självsimilär med index k då $k>0$ är en konstant. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Nyligen hävdade en gäst vid institutionen i ett föredrag att varje Gaussisk stokastisk process $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ som är självsimilär med index k måste ha kovariansfunktion $r_Y(s,t) = \mathbf{Cov}\{Y(s),Y(t)\} =$ "konstant" $\times\, (s^{2k}+t^{2k}-|t-s|^{2k})$. Förklara (tex. mha. ett exempel) för gästen varför hans uttalande är felaktigt. **(2.5 poäng)**

Uppgift 4 Ange fyra olika exempel som vart och ett tydligt illustrerar att ett par (olika) stokastiska processer som har likadana väntevärdes- och kovariansfunktioner kan uppvisa helt olika egenskaper och/eller uppförande. **(5 poäng)**

Uppgift 5 En svagt stationär signal $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med väntevärdesfunktion $m_S(t) = \mathbf{E}\{S(t)\} = 0$, kovariansfunktion $r_S(\tau) = \mathbf{E}\{S(t)S(t+\tau)\}$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_S(\tau)\, d\tau$, störs av ett oberoende brus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med väntevärdesfunktion $m_N(t) = \mathbf{E}\{N(t)\} = 0$, kovariansfunktion $r_N(\tau) = \mathbf{E}\{N(t)N(t+\tau)\}$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_N(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_N(\tau)\, d\tau$. Störningen är multiplikativ, så att den observerbara signalen $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ges av $X(t) = S(t)N(t)$. Härled ett filter (uttryckt mha. r_S, r_N, $\mathcal{P}_S$ och/eller $\mathcal{P}_N$) med insignal $X(t)$ vars utsignal $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ minimerar avvikelsen $\mathbf{E}\big\{(Y(t)-S(t))^2\big\}$. **(5 poäng)**

Uppgift 6 - Projekt 1 $\boxed{\mathbf{a}}$ Ett talpar av oberoende slumptal (η_1,η_2) i intervallet $[-1,1]$ erhålles genom att sätta $\eta_i = 2\,(\xi_i - 1/2)$ för $i=1,2$, där ξ_1 och ξ_2 är oberoende slumptal mellan 0 och 1. Tag nu konsekutiva (på varandra följande) sådana talpar (η_1,η_2) ända tills för första det gäller att $\eta_1^2+\eta_2^2\leq 1$ (dvs. talparet hamnar på eller innanför enhetscirkeln). Förklara (gärna med ord) varför det normerade talparet $(\zeta_1,\zeta_2) = (\eta_1,\eta_2)/\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}$ har likformig fördelning över enhetscirkeln, samt även vad detta betyder (dvs. "likformig fördelning över enhetscirkeln"). **(1.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{b}}$ Beskriv någorlunda explicit hur man kan simulera en tidsdiskret stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ för $t=0,\ldots,10$, då processens väntevärdesfunktion och kovariansfunktion är kända. **(2 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Låt $Z(t)=X(t)-Y(t)$ för $t\geq 0$, där $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är oberoende Poisson processer med intensitet 1. Beskriv explicit hur man medelst simulering kan skatta sannolikheten $\mathbf{P}\big\{\max_{t\in[0,10]}|Z(t)|\geq 5\big\}$. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\textbf{Uppgift 6 - Projekt 2}}$ $\boxed{\mathbf{a}}$ I projektet beräknas ett approximativt konfidensintervall för bitfelssannolikheten P_b genom att utgå från sambandet (erhållet via centrala gränsvärdessatsen)

$$\mathbf{P}\bigg\{-\varDelta\leq\frac{\hat{P}_b-P_b}{\sigma/\sqrt{M}}\leq\varDelta\bigg\}\approx 1-2Q(\varDelta)\quad\text{där}\quad\sigma=\sqrt{P_b(1-P_b)/M}\,.$$

Visa hur ett alternativt (enklare) approximativt intervall kan härledas genom att istället utgå från

$$\mathbf{P}\bigg\{-\varDelta\leq\frac{\hat{P}_b-P_b}{\sigma/\sqrt{M}}\leq\varDelta\bigg\}\approx 1-2Q(\varDelta)\quad\text{där}\quad\sigma=\sqrt{\hat{P}_b(1-\hat{P}_b)/M}\,.\qquad\textbf{(1.5 poäng)}$$

$\boxed{\mathbf{b}}$ I tekniska tillämpningar är det ofta "extrema händelser" (tex. hundraårsvinden) som är avgörande vid dimensionering. Detta svarar mot utfall med extremt stora eller extremt små värden, och mycket liten sannolikhet (kanske de 100 största observationerna ibland 10000 observerade data). Det går bevisa att normalapproximation ger dåliga resultat vid sådana tillämpningar, och det är istället en så kallad extremvärdesfördelning som är korrekt (bör användas vid approximationer). Detta betyder att de extrema datavärden som observeras har fördelningsfunktion $F(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{(x-a)/b}}$ för $x\in\mathbb{R}$, för några parametrar $a\in\mathbb{R}$ och $b>0$. Försök säga något om vad det krävs i fråga om praktiskt och analytiskt arbete för att beräkna ett 95% konfidensintervall för ett framtida extremt värde (dvs. ett intervall inom vilket en stokastisk variabel med fördelningsfunktion F hamnar med sannolikhet 0.95), utgående från ovan beskrivna extremvärdesför- delning och det observerade datamaterialets extrema data. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\mathbf{c}}$ Diskutera vilka antaganden i projektet som vid en mera detaljerad analys kan visa sig vara väl grova förenklingar av verkligheten, och som därför kan behöva

modifieras (generaliseras). Säg något om hur behovet av sådana modifikationer (generaliseringar) kan undersökas, och hur man kan välja modifikationer (generaliseringar), samt hur beräkningarna i projektet då måste modifieras (generaliseras).
(2 poäng)

LYCKA TILL!