TMA 421 Stokastiska Processer för E

Tentamen den 19/12 - 01 kl. 8^{45}-13^{45} i V.

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, Beta, och Projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 031/772 3512

Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Tentamensresultat anslås i MD-husets källare, samt i E-huset, då det är klart. Inga resultat lämnas ut innan dess. Meddelande skickas via emaillista då resultat anslås.

Tentamina kan granskas, och ev. frågor eller *klagomål* på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning (öppen lunchtid terminstid), på härför speciellt avsett formulär.

Inlämnade svar skall åtföljas av någorlunda (men inte överdrivet) fullständiga motiveringar. Vanligen räcker det att bifoga relevanta beräkningar.

Denna gång testas en lite "mjukare" sjätteuppgift än vanligt: Ange gärna åsikt om denna (rättvis, orättvis, etc.).

Uppgift 1. I denna uppgift studeras överföring av information, i form av antingen en "etta" $\mathbb{1}$, eller en "nolla" $\mathbb{O}$, via en brusig tidsdiskret kanal. Bruset är en svagt stationär process $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, med väntevärdesfunktion (vvf.) $m_N = \mathbf{E}\{N(t)\} = 0$.

En svagt stationär signal $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, stationärt korrelerad med bruset och med vvf. $m_S = 0$, sändes då $\mathbb{1}$ skall överföras, medan noll-signalen sändes då $\mathbb{O}$ skall överföras.

Mottagaren observerar den svagt stationära processen $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, given av

$$X(t) = \begin{cases} N(t)+S(t) & \textit{om } \mathbb{1} \textit{ sänd} \\ N(t) & \textit{om } \mathbb{O} \textit{ sänd} \end{cases}.$$

Processen $X(t)$ filtreras. Filtrets impulssvar $h(\ell)$ är symmetriskt $[h(-\ell)=h(\ell)]$ och summerbart $[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}|h(\ell)|<\infty]$, med frekvensfunktion $H(f)$. Utsignalen är

$$Y(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h(\ell)X(t-\ell) \quad \text{för } t\in\mathbb{Z} \qquad \text{där} \qquad H(f) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\ell}h(\ell) \quad \text{för } |f|<\tfrac{1}{2}.$$

Mao. ges utsignalen $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ från filtret av

$$Y(t) = (h\star X)(t) = \begin{cases} N_{\mathrm{ut}}(t)+S_{\mathrm{ut}}(t) & \text{om } \mathbb{1} \text{ sänd} \\ N_{\mathrm{ut}}(t) & \text{om } \mathbb{O} \text{ sänd} \end{cases} \qquad \text{där} \qquad \begin{cases} N_{\mathrm{ut}}(t) = (h\star N)(t) \\ S_{\mathrm{ut}}(t) = (h\star S)(t) \end{cases}.$$

Mottagaren söker avgöra om $\mathbb{1}$ eller $\mathbb{O}$ sänts, mha. $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, enligt regeln

$$\begin{cases} \textit{besluta } \mathbb{1} \textit{ sänd} & \textit{om } Y(0)^2 \geq E \\ \textit{besluta } \mathbb{O} \textit{ sänd} & \textit{om } Y(0)^2 < E \end{cases}.$$

Beslutsnivån E definieras som medelvärdet av medeleffekten i fallen $\mathbb{1}$ och $\mathbb{O}$, dvs.

$$E \equiv \tfrac{1}{2}(E_{\mathbb{1}}+E_{\mathbb{O}}) \quad \text{där} \quad E_{\mathbb{1}} = \mathbf{E}\{(N_{\mathrm{ut}}(0)+S_{\mathrm{ut}}(0))^2\} \quad \text{och} \quad E_{\mathbb{O}} = \mathbf{E}\{N_{\mathrm{ut}}(0)^2\}.$$

Ett mått på systemets relativa upplösning (av $\mathbb{1}$ jämfört med $\mathbb{O}$), definieras som

$$\text{(Signal Noice Ratio)} \qquad \mathrm{SNR} \equiv 2\,(E_{\mathbb{1}}-E_{\mathbb{O}})/(E_{\mathbb{1}}+E_{\mathbb{O}})\,.$$

$\boxed{\text{a}}$ Låt bruset och signalen ha kovariansfunktioner (kvf.) $r_N(t)$ resp. $r_S(t)$, samt korskovariansfunktion (korskvf.) $r_{N,S}(t)$, med motsv. spektraltätheter $\mathcal{P}_N(f)$ resp. $\mathcal{P}_S(f)$, samt korsspektraltäthet $\mathcal{P}_{N,S}(f)$, givna av

$$\begin{cases} r_N(t) = \mathbf{Cov}\{N(s),N(s+t)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi ft}\,\mathcal{P}_N(f)\,df \\ r_S(t) = \mathbf{Cov}\{S(s),S(s+t)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi ft}\,\mathcal{P}_S(f)\,df \qquad \text{för} \quad t \in \mathbb{Z}\,. \\ r_{N,S}(t) = \mathbf{Cov}\{N(s),S(s+t)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi ft}\,\mathcal{P}_{N,S}(f)\,df \end{cases}$$

Visa följande formler för E och SNR:

$$\begin{cases} E = \int_{-1/2}^{1/2} H(f)^2\Big(\mathcal{P}_N(f)+\tfrac{1}{2}\mathcal{P}_S(f)+\mathcal{P}_{N,S}(f)\Big)\,df \\ \mathrm{SNR} = \int_{-1/2}^{1/2} H(f)^2\Big(\mathcal{P}_S(f)+2\mathcal{P}_{N,S}(f)\Big)\,df \Big/ E \end{cases}.$$

(3 poäng)

$\boxed{\text{b}}$ I en $\boxed{\text{b}}$-uppgift vid tentamen, har bruset kvf. $r_N(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$. Tentanden har tre valmöjligheter $H_1(f)$, $H_2(f)$ och $H_3(f)$ för frekvensfunktionen $H(f)$:

$$H_1(f) = 1, \qquad H_2(f) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad \frac{1}{4} \le |f| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{om} \quad 0 \le |f| < \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{och} \quad H_3(f) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad \frac{1}{4} \le |f| < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{om} \quad 0 \le |f| < \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vidare har tentanden tre valmöjligheter $\{S_1(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, $\{S_2(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ och $\{S_3(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, för signalen $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, med motsv. kvf. $r_S(t)$ givna av

$$r_1(t) = \mathrm{e}^{-|t|}, \qquad r_2(t) = 1/(1+t^2) \qquad \text{resp.} \qquad r_3(t) = \mathrm{e}^{-t^2} \qquad \text{för} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Antag slutligen, för enkelhetens skull, att korskvf. $r_{N,S}(t)=0$.

Förklara för tentanden och examinator, varför nedan bifogade `Mathematica` beräkningar är tillräckliga för att, utan några ytterligare beräkningar, bestämma vilken av de nio möjliga kombinationerna av frekvensfunktion $H(f)$ och signal $S(t)$, enligt ovan, som ger störst SNR. Utför sedan bestämningen, och meddela tentanden och examinator resultatet (dvs. den bästa kombinationen), samt motsv. SNR. **(2 poäng)**

```
In[1]:= r1[k_] := Exp[-k];   P1[f_] := 2*Sum[Cos[2 Pi f k]*r1[k], {k, 1, Infinity}] + 1

In[2]:= Int1 = 2 NIntegrate[P1[f], {f, 0, 1/4}];

In[3]:= r2[k_] := 1/(1 + k^2);   P2[f_] := 2*Sum[Cos[2 Pi f k]*r2[k], {k, 1, Infinity}] + 1

In[4]:= Int2 = 2 NIntegrate[P2[f], {f, 0, 1/4}];

In[5]:= r3[k_] := Exp[-k^2];   P3[f_] := 2*Sum[Cos[2 Pi f k]*r3[k], {k, 1, Infinity}] + 1

In[6]:= Int3 = 2 NIntegrate[P3[f], {f, 0, 1/4}];

In[7]:= N[{r1[0]/(r1[0]/2 + r1[0]), r2[0]/(r2[0]/2 + r1[0]), r3[0]/(r3[0]/2 + r1[0])}]

Out[7]= {0.666667, 0.666667, 0.666667}

In[8]:= {(r1[0] - Int1)/((r1[0] - Int1)/2 + (r1[0] - Int1)), (r2[0] - Int2)/((r2[0] - Int2)
            /2 + (r1[0] - Int1)), (r3[0] - Int3)/((r3[0] - Int3)/2 + (r1[0] - Int1))}

Out[8]= {0.666667, 0.531075, 0.650745}

In[9]:= {Int1/(Int1/2 + Int1), Int2/(Int2/2 + Int1), Int3/(Int3/2 + Int1)}

Out[9]= {0.666667, 0.711899, 0.672625}
```

$\boxed{\texttt{Uppgift 2.}}$ I denna uppgift är $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ en stokastisk process med vvf. $m_X(t)=0$.

De n-dimensionella fördelningarna för processen $X(t)$, för något val av $n\in\mathbb{N}$, är fördelningsfunktionerna av typ

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x) = \mathbf{P}\{X(t_1)\leq x_1,\ldots,X(t_n)\leq x_n\} \quad \text{för} \quad x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},\ t_1,\ldots,t_n\geq 0.$$

[I följande frågor är det svarets motivering som är det viktiga. Ett korrekt svar utan motivering ger ej poäng.]

$\boxed{\texttt{a}}$ Är kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna, $F_{X(t)}(x) = \mathbf{P}\{X(t)\leq x\}$, tillräcklig för att bestämma $\mathbf{P}\{\max_{t\geq 0} X(t)\leq x\}$ för $x\in\mathbb{R}$? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Är kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna tillräcklig för att avgöra om $X(t)$ är en Poisson process? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{c}}$ Kan, åtminstone ibland, kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna vara tillräcklig för att visa att $X(t)$ ej är självsimilär? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{d}}$ Är kännedom om de 2-dimensionella fördelningarna, $F_{X(s),X(t)}(x,y) = \mathbf{P}\{X(s)\leq x, X(t)\leq y\}$, tillräcklig för avgöra om $X(t)$ är bandbegränsat vitt brus? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{e}}$ Är kännedom om de 3-dimensionella fördelningarna, $F_{X(r),X(s),X(t)}(x,y,z) = \mathbf{P}\{X(r)\leq x, X(s)\leq y, X(t)\leq z\}$, tillräcklig för att bestämma om $X(t)$ är svagt stationär? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 3.}}$ I många tillämpningar modelleras kontinuerligt vitt brus som en stationär Gaussisk stokastisk process $N(t)$, med vvf. $m_N(t)=0$ och kvf. $r_N(t)=\delta(t)$, bortsett från en principiellt oviktig multiplikativ konstant, som vi sätter till 1. [Uppenbart är $\delta(t)$ ej en kvf., ty den är ej ens en funktion.]

I denna uppgift relateras $N(t)$ till Wiener processens (icke-existerande) derivata $W'(t)$.

Det finns en ganska svår matematik för kontinuerligt vitt brus, i vilken Wiener processens derivata intar en plats liknande den Dirac's δ-distribution gör i distributionslära. Emellertid det, relativt denna, mera heuristiska arbetssätt vi har i denna kurs, passar bättre för tillämpningar.

Låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ vara en standard Wiener process, och betrakta differenskvoten $W_h(t) = (W(t+h)-W(t))/h$ för $t,h>0$. Inför motsv. kvf.

$$r_h(t,t+\tau) = \mathbf{Cov}\{W_h(t),W_h(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\Big\{\frac{W(t+h)-W(t)}{h},\frac{W(t+\tau+h)-W(t+\tau)}{h}\Big\}.$$

$\boxed{\texttt{a}}$ Visa att processen $\{W_h(t)\}_{t>0}$ är Gaussisk och stationär, genom först visa att

$$r_h(t,t+\tau) = \max\{h-|\tau|,0\}/h^2 \quad \text{för} \quad \tau>-t \quad \text{(som ju ej beror av } t). \quad \textbf{(2.5 poäng)}$$

$\boxed{\texttt{b}}$ Visa att funktionen $\mathbb{R}\ni\tau\mapsto r_h(\tau)\equiv\max\{h-|\tau|,0\}/h^2$ konvergerar mot Dirac's δ-distribution $\delta(\tau)$, då $h\downarrow 0$, genom visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_h(\tau)\,d\tau = 1 \quad \text{för} \quad h>0 \quad \text{och} \quad \lim_{h\downarrow 0} r_h(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{för } \tau\neq 0 \\ \infty & \text{för } \tau=0 \end{cases}. \quad \textbf{(0.5 poäng)}$$

$\boxed{\texttt{c}}$ Förklara mha. resultatet i uppgift $\boxed{\texttt{b}}$ varför $W'(t)$ ej existerar. **(0.75 poäng)**

$\boxed{\texttt{d}}$ Förklara i vilken mån resultateten i uppgifterna $\boxed{\texttt{a}}$-$\boxed{\texttt{c}}$ kan generaliseras till mera allmänna Lévy processer (än Wiener processen). **(1.25 poäng)**

`Uppgift 4.` En enkel modell anger priset $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ för en aktie som en Gaussisk MA(3)-process, med parametrar $\sigma^2=\frac{1}{4}$ och $c_1=c_2=c_3=1$. Man vill göra en prediktion $P=aX(t)+bX(t-1)$ av $X(t+1)$, mha. observationer av $X(t)$ och $X(t-1)$.

`a` Beräkna $\mathbf{P}\{|X(t+1)-P|>1\}$ för den naiva prediktorn $P=X(t)$. **(1.5 poäng)**

`b` Visa att $P=\frac{6}{7}X(t)-\frac{1}{7}X(t-1)$ minimerar $\mathbf{P}\{|X(t+1)-P|>1\}$. **(2 poäng)**

`c` Mera realistiskt är att ansätta en MA(3)-modell med några okända parametrar, och sedan skatta dessa mha. observationer av $X(1),\ldots,X(n)$. Beskriv hur denna skattning kan utföras, om $c_1=1$, men σ^2, c_2 och c_3 antages okända. **(1.5 poäng)**

`Uppgift 5.` `a` En stationär stokastisk process är inte alltid svagt stationär (även om vi negligerat detta i den introduktion till stokastiska processer som `StokProcE` utgör). Ty processen kan ha oändligt (divergent) väntevärde eller oändlig varians, så att vvf. eller kvf. ej existerar.

Ge ett exempel på en stationär process som ej är svagt stationär. **(1 poäng)**

`b` Ge exempel på ett diskret vitt brus $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som ej är stationärt. **(1 poäng)**

`c` Ge ett exempel på en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ som ej är stationär, och som har kvf. $r_X(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$. **(1 poäng)**

`d` Wiener processen är den enda självsimilära Lévy processen med ändlig kvf. Visa mha. detta, att för icke-Gaussiska stationära $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kvf. $r_X(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$, processen $\{\sqrt{t}\,X(\ln\sqrt{t})\}_{t>0}$ har kvf. $\min\{s,t\}$, men är ej en Lévy process. **(1 poäng)**

`e` Låt ξ och η vara oberoende $\mathrm{N}(0,1)$-fördelade s.v. Förklara (gärna utan att räkna), varför det för den tvådimensionella variablen $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)=(\mathrm{sign}(\eta)\,\xi,\mathrm{sign}(\xi)\,\eta)$, gäller att ζ_1 och ζ_2 är $\mathrm{N}(0,1)$-fördelade, men ζ är ej N-fördelad i $\mathbb{R}^2$. **(1 poäng)**

`Uppgift 6.` Diskutera fem distinkta och rimligt substantiella upplevelser, ifrån arbetet med projektet. [Projektet omfattar 0.5 poäng, dvs. ca. två arbetsdagar, och bör därför lätt inge fem sådana upplevelser. Om så ändå ej var fallet, förklara istället varför, på fem sätt ... .]

Beskriv tex. upplevelser i form av olika problem som uppstod vid arbete med olika delmoment i projektet, som problem vid datorimplementeringar och/eller arbete med teorimoment. Eller upplevelser i form av undringar över olika modelleringsval som figurerar i projektet. Eller upplevelser i form av associationer projektet väckte till andra kursmoment under utbildningen. Eller upplevelser i form av reflektioner över relationer till resterande kursstoff i `StokProcE`. Etc. **(5 poäng)**

Vid examinering av Uppgift 6 ges ej poäng för att text mer eller mindre direkt kopieras från projektstencil till tentamenssvar. Inlämnade upplevelser skall vara så “djupa” att det framgår att projektet utförts på ett seriöst vis.

`Lycka till!`