TMA 421 Stokastiska Processer för E

Tentamen den 3/4 - 02 14^{15}-19^{15} i M.

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, Beta, och Projektstenciler.
LÄRARE: Patrik Albin 031/772 3512

Övningstentamen 011207 ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Tentamensresultat anslås i MD-husets källare och i E-huset då det är klart, vilket beräknas bli senast måndag förmiddag 8/4. Inga resultat lämnas ut innan dess.

Lösningar till tentamen anslås på Patrik Albins `www`-sida efter tentamens slut.

För betygen 3 (godkänt), 4 och 5 erfordras normalt 12, 18 resp. 24 poäng. (Vid svåra tentamina kan kraven sänkas något, men de höjs aldrig.)

Tentamina kan granskas, och ev. frågor eller *klagomål* på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning (öppen lunchtid terminstid), på härför speciellt avsett formulär.

Inlämnade svar skall åtföljas av någorlunda (men ej överdrivet) fullständiga motiveringar. Vanligen räcker det att bifoga relevanta beräkningar.

Lösning skall endast lämnas till en av tentamens båda sjätteuppgifter! Löses båda kan normalt endast den lösning som ger minst poäng tillgodoräknas.

Uppgift 1. Över en seriekoppling av en resistans R och en kapacitans C anbringas en spänning i form av en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. För spänningen $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ över kapacitansen gäller då att $RCU'(t)+U(t) = X(t)$. Beräkna variansen för $U(t)$ då $X(t)$ har kovariansfunktion $r_X(\tau) = r_0 \sin(\tau)/\tau$ [för $\tau\neq 0$, $r_X(0)=r_0$], där $r_0>0$ är en konstant. **(5 poäng)**

Uppgift 2. Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poisson process med intensitet 1.

a Beskriv hur $\mathbf{P}\{X(1) \leq \frac{1}{2}X(2)\}$ kan beräknas. Det räcker tex. att svara med någon form av summa, vars värde ej behöver beräknas. Det går också bra att svara med något dataprogram eller flödesschema som löser uppgiften. **(2.5 poäng)**

b Sätt $Y(t)=X(t)-t$ för $t\geq 0$ och $Z(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\,Y(\mathrm{e}^t)$ för $t\in\mathbb{R}$. Är processen $Z(t)$ svagt stationär och/eller stationär? (Motivera svaret.) **(2.5 poäng)**

Uppgift 3. Visa att $X(t)=tW(t^{-1})$ för $t>0$, $X(0)=0$, är en Wiener process då $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en Wiener process. Visa även att $X(t)$ är högerkontinuerlig i $t=0$, genom visa att $\text{l.i.m.}_{t\downarrow 0}\, t\,W(t^{-1}) = 0$ [dvs. $t\,W(t^{-1}) \to 0$ då $t\downarrow 0$]. **(5 poäng)**

Uppgift 4. (PARSEVALS FORMEL) Visa att $\int_{-1/2}^{1/2} |H(f)|^2\,df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)^2$ då $H(f)$ är frekvensfunktionen för ett summerbart tidsdiskret impulssvar $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$. Vad blir motsv. samband för $\int_{-1/2}^{1/2} H(f)\overline{G(f)}\,df$ då $H(f), G(f)$ är frekvensfunktioner för summerbara tidsdiskreta impulssvar $h,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$? **(5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 5.}}$ Låt $\{X(t)\}_{t\in \mathrm{Z}}$ vara en stationär Gaussisk process med känt väntevärde m_X och känd kovariansfunktion $r_X(\tau)$. Bestäm de koefficienter $a, b, c \in \mathrm{R}$ som minimerar felet $\mathbf{E}\{|X(t)-\mathcal{I}|\}$ vid skattning av processvärdet $X(t)$ (tex. "missing data") mha. interpolatorn $\mathcal{I} = aX(t-k)+bX(t+k)+c$, givet $k\in \mathrm{N}$. **(5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 - Projekt 1.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Om $\xi_1, \xi_2, \ldots$ är oberoende $\exp(\lambda)$-fördelade s.v. definieras Poisson processen

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad 0 \le t < \xi_1 \\ 1 & \text{då} \quad \xi_1 \le t < \xi_1+\xi_2 \\ 2 & \text{då} \quad \xi_1+\xi_2 \le t < \xi_1+\xi_2+\xi_3 \\ & \quad \vdots \end{cases} \qquad \text{för} \quad t \ge 0\,.$$

Man vill skatta sannolikheten $\mu = \mathbf{P}\{X(t) > t \text{ för ngt. } t \in (0,10]\}$ mha. simulering.

Låt m vara det antal "hopp" $X(t)$ hinner med för $t\in(0,10]$, så att

$$m \qquad \text{satisfierar} \qquad \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m \le 10 < \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m+\xi_{m+1}\,.$$

Då gäller att

$$(\star) \quad X(t) > t \quad \text{för ngt. } t\in(0,10] \;\Leftrightarrow\; \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k < k \quad \text{för ngt. } k\in\{1,\ldots,m\},$$

ty händelsen till höger innebär ju att $X(t)$ når värdet k innan tiden $t=k$.

Visa [tex. mha. en flödesplan eller någon lättförstådd (påhittad eller verklig) programkod] hur man gör ett konfidensintervall för sannolikheten μ mha. simulering.

Programmet (flödesplanen) bör skapa ett antal (säg $n=100000$) oberoende försök, där man i varje försök avgör om händelsen "$X(t)>t$ för något $t\in(0,10]$" inträffar eller ej [tex. mha. sambandet $(\star)$]. Antag att $\lambda=1$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Betrakta den stationära Gaussiska processen

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+s)\, dW(s) \qquad \text{där} \qquad h(t) = 1-|t| \quad \text{för} \quad |t|\le 1 \qquad \text{och} \qquad h(t)=0 \quad \text{f.ö.}$$

Skriv ett <u>lättförståeligt</u> program (i något existerande eller påhittat programspråk) som mha. simulering skattar sannolikheten $\mathbf{P}\{\max_{t\in[0,10]} X(t) \ge 3\}$. **(2.5 poäng)**

Ledning: Då en realisering av $X(t)$ simulerats kan $\max_{t\in[0,10]} X(t)$ beräknas mha. ett kommando av typ `Max[X[t],{t,0,10}]` (`Mathematica`).

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 - Projekt 2.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Signalen $\{D(k)\}_{k\in\mathrm{Z}}$ består av oberoende likafördelade s.v. med möjliga värden $\{0,1,\ldots,1023\}$ som alla är lika sannolika $\mathbf{P}\{D(k)=j\} = \frac{1}{1024}$. Signalen $D(k)$ är insignal till en modulator med kontinuerlig utsignal

$$S(t) = j \quad \text{om} \quad D(k)=j \qquad \text{för} \quad j\in\{0,1,\ldots,1023\} \quad \text{och} \quad k\le t<k+1.$$

Till sända signalen $\{S(t)\}_{t\in\mathrm{R}}$ adderas på kanalen svagt stationärt brus $\{W(t)\}_{t\in\mathrm{R}}$ med väntevärde $m_W = 0$ och kovariansfunktion $r_W(\tau) = \mathrm{e}^{-5|\tau|}$. Den mottagna signalen $X(t) = S(t)+W(t)$ är insignal till en demodulator med diskret utsignal

$$Y(k) = \int_k^{k+1} X(t)\,dt = \int_k^{k+1} S(t)\,dt + \int_k^{k+1} W(t)\,dt = D(k)+N(k) \qquad \text{för} \quad k\in\mathrm{Z}.$$

Mha. $Y(k)$ fattar beslutskretsen beslutet $\hat{D}(k)$ [rörande värdet av $D(k)$] enligt

$$\hat{D}(k) = \begin{cases} 1023 & \text{om} \quad 1022.5 < Y(k) \\ j & \text{om} \quad j-\frac{1}{2} < Y(k) \leq j+\frac{1}{2}, \quad \text{för } j \in \{1,\ldots,1022\} \\ 0 & \text{om} \quad Y(k) \leq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

En ganska enkel beräkning visar att sannolikheten för fel beslut ges av

$$\mathbf{P}\{\hat{D}(k) \neq D(k)\} = \frac{1}{1024}\Big(\mathbf{P}\{N(k) > \tfrac{1}{2}\} + \sum_{j=1}^{1022} \mathbf{P}\{|N(k)| > \tfrac{1}{2}\} + \mathbf{P}\{N(k) < -\tfrac{1}{2}\}\Big).$$

Beräkna denna sannolikhet då $\{W(t)\}_{t\in\mathrm{R}}$ är Gaussisk. **(2.5 poäng)**

b Betrakta problemet från Uppgift 6.a, men förutsätt nu ej att bruset $\{W(t)\}_{t\in\mathrm{R}}$ är Gaussiskt. Brustermerna $\{N(k)\}_{k\in\mathrm{Z}}$ i den demodulerade signalen $Y(k) = D(k) + N(k)$ är då ej normalfördelade. Fortfarande gäller att brustermerna är oberoende.

Antag att man genom sändningsprov skaffat observationerna $\{n(k)\}_{k=1}^{10000}$ av bruset $\{N(k)\}_{k=1}^{10000}$, och att observationerna sparats i en datafil. Skriv ett program som

- skapar observationer $\{d(k)\}_{k=1}^{10000}$ av signalvärdena $\{D(k)\}_{k=1}^{10000}$,
- skapar observationer $\{y(k)\}_{k=1}^{10000}$ av den demodulerade signalen $\{Y(k)\}_{k=1}^{10000}$,
- skapar observationer $\{\hat{d}(k)\}_{k=1}^{10000}$ av besluten $\{\hat{D}(k)\}_{k=1}^{10000}$,
- skapar observationer $\{g(k)\}_{k=1}^{10000}$ av felen $G(k) = \begin{cases} 1 & \text{då } \hat{D}(k) \neq D(k) \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$,
- gör ett konfidensintevall för bitfelssannolikheten $P_b = \mathbf{P}\{\hat{D}(k) \neq D(k)\}$ mha. observationen $\hat{p}_b = \frac{1}{10000}\sum_{k=1}^{10000} g(k)$ av bitfelsskattaren $\hat{P}_b = \frac{1}{10000}\sum_{k=1}^{10000} G(k)$.

Programmet behöver inte vara exekverbart eller skrivet i något existerande programspråk. Det som krävs är att de moment som behövs i ett "riktigt" fungerande program illustreras. Givetvis skall programmet också vara lättläst. Använd tex.

kommandot `d <- as.integer(runif(10000,1,1024))`

för att skapa vektorn $d = (d(1),\ldots,d(10000))$, och (tex.)

kommandot `n <- source("ndata10000.dat")`

för att läsa in filen med brusobservationer till vektorn $n = (n(1),\ldots,n(10000))$.

Formel (3) för konfidensintervallet i projektstencilen gäller även vid 1024 möjliga värden: Formeln utnyttjar endast Centrala Gränsvärdessatsen samt att $G(m)$ är en $\{0,1\}$-värd s.v. med $\mathbf{P}\{G(m)=1\} = 1 - \mathbf{P}\{G(m)=0\} = P_b$, vilket gäller även vid 1024 värden. Tag gärna $\Delta = 2$ eller $\Delta = 3$ i intervallformeln (3). **(2.5 poäng)**

`Lycka till!`