TMA 421 Stokastiska Processer för E

Tentamen den 19/8 - 02 14^{15}-19^{15} i M

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, Beta, och Projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 031/772 3512

Övningstentamen 011207 ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Tentamensresultatet meddelas via email och anslås i MD-husets källare då det är klart. Pga. konferensresa from. kvällen 19/8 detta blir tidigast den 28/8.

Lösningar till tentamen anslås i MD-husets källare snarast möjligt efter tentamen.

För betyg 3 (godkänd), 4 och 5 erfordras normalt 12, 18 resp. 24 poäng. (Vid svår tentamen kan kraven sänkas något. De höjs aldrig.)

Tentamensuppgifterna är relativt jämnsvåra (kommer alltså ej i svårighetsordning).

Tentamina kan granskas, och ev. frågor eller *klagomål* på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning (öppen lunchtid terminstid), på härför speciellt avsett formulär.

Inlämnade svar skall åtföljas av någorlunda (men ej överdrivet) fullständiga motiveringar. Vanligen räcker det att bifoga relevanta beräkningar.

`Uppgift 1.` `a` Visa att $V_X = \mathbf{Var}\{X(t)\}$ ej beror av $t \in \mathrm{R}/\mathrm{Z}$, dvs. är konstant, för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathrm{R}/\mathrm{Z}}$ (där svagt stationär definieras enligt resultatsammanfattningen). Med $t \in \mathrm{R}/\mathrm{Z}$ menas att tiden antingen är kontinuerlig $t \in \mathrm{R}$ eller diskret $t \in \mathrm{Z}$. **(2 poäng)**

`b` Uttryck V_X för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathrm{R}/\mathrm{Z}}$ mha. processens spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)$ (samt matematiska operationer av "standardtyp"). **(2 poäng)**

`c` Uttryck $V_{X'} = \mathbf{Var}\{X'(t)\}$ för derivatan $X'(t)$ av en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathrm{R}}$ mha. $X(t)$'s spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)$. **(1 poäng)**

`Uppgift 2.` `a` Givet en integrerbar funktion $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ med integrerbar Fouriertransform $\mathcal{F}g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i2\pi tx}\, g(t)\, dt$, bestäm $(\mathcal{F}\mathcal{F}g)(x)$, dvs. Fourier-transformen av Fourier-transformen. [Svaret skall uttrycka $(\mathcal{F}\mathcal{F}g)(x)$ mha. g utan några Fourier-operatorer $\mathcal{F}$, dvs. svaret $(\mathcal{F}\mathcal{F}g)(x)$ ger inga poäng.] **(2.5 poäng)**

`b` Beskriv en fungerande strategi för att avgöra om funktionen $r : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ given av $r(x) = 1 - |x|$ för $|x| \le 1$, och $r(x) = 0$ för $|x| > 1$ är kvf. (kovariansfunktion) för någon svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathrm{R}}$. Förklara ordentligt varför strategin verkligen fungerar (kan utföras explicit) för den givna funktionen r. (Det är dock ej nödvändigt att utföra avgörandet.) **(2.5 poäng)**

`Uppgift 3.` `a` Låt (ξ, η) vara en N-fördelad s.v. i R^2 med $\mathbf{Var}\{\xi\} = 2$ och $\mathbf{Var}\{\eta\} = 1$. Bestäm de möjliga värdena för $\mathbf{Cov}\{\xi, \eta\}$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Låt $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ vara en N-fördelad s.v. i R^2 med känd varians $\mathbf{Var}\{\xi\}$. Bestäm talet $\varrho\in\mathrm{R}$ så att $\xi_1-\varrho\xi_2$ och ξ_2 blir oberoende. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 4.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Funktionen $r:\mathrm{Z}\to\mathrm{R}$ ges av $r(0)=a$, $r(\pm1)=b$ och $r(k)=0$ för $|k|\geq2$, där $a>0$ och $b\in\mathrm{R}$ är tal med $a\geq2|b|$. Visa att det finns en MA(1)-process $\{X(t)\}_{t\in\mathrm{Z}}$ som har kvf. $r_X(k)=r(k)$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Beskriv hur man utgående från diskret vitt brus $\{e(t)\}_{t\in\mathrm{Z}}$ (med varians 1 säg) kan konstruera en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathrm{Z}}$ med kvf. $r_X(0)=3$, $r_X(\pm1)=2$, $r_X(\pm2)=1$ och $r_X(k)=0$ för $|k|\geq3$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 5.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Beräkna utsignalen $Y(t)=h\star X(t)$ från filtret med impulssvar $h(s)=\varphi(s)$ om insignalen $\{X(t)\}_{t\in\mathrm{R}}$ är hagelbrus med $g(x)=\varphi(x)$. [Som vanligt är $\varphi(s)$ $\mathrm{N}(0,1)$-fördelningens frekvensfunktion.] **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Bestäm väntevärdet m_Y, kvf. r_Y och korskvf. $r_{X,Y}$ för processerna X och Y i Uppgift 5.a. (OBS: Man behöver ej ha löst 5.a för att kunna lösa 5.b.) **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6.}}$ Diskutera fem distinkta och rimligt substantiella upplevelser, ifrån arbetet med projektet. [Projektet omfattar 0.5 poäng, dvs. ca. två arbetsdagar, och bör därför lätt inge fem sådana upplevelser. Om så ändå ej var fallet, förklara istället varför, på fem sätt ... .]

Beskriv tex. upplevelser i form av olika problem som uppstod vid arbete med olika delmoment i projektet, som problem vid datorimplementeringar och/eller arbete med teorimoment. Eller upplevelser i form av undringar över olika modelleringsval som figurerar i projektet. Eller upplevelser i form av associationer projektet väckte till andra kursmoment under utbildningen. Eller upplevelser i form av reflektioner över relationer till resterande kursstoff i `StokProcE`. Etc. **(5 poäng)**

Vid examinering av Uppgift 6 ges ej poäng för att text mer eller mindre direkt kopieras från projektstencil till tentamenssvar. Inlämnade upplevelser skall vara så "djupa" att det framgår att projektet utförts på ett seriöst vis.

$\boxed{\texttt{Lycka till!}}$