Tentamen TMA 421 StokProcE den 18/12 - 02 kl. 8^{45}-13^{45} i V.

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, Beta, och Projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 031/772 3512.

Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Tentamensresultat anslås i MD-husets källare, samt i E-huset, då det är klart. Inga resultat lämnas ut innan dess. Meddelande skickas via emaillista då resultat anslås.

Tentamina granskas, och ev. frågor eller klagomål på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning, på därför speciellt avsett formulär, som hänger på väggen i det lilla rummet mittemot mottagningen. Lämna ifyllt formulär där, så tar första lärare som kommer hand om det.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda (men ej överdrivet) fullständigt.

Uppgift 1. En svagt stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ har kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\} = \mathrm{e}^{-|\tau|}$ och väntevärdesfunktion $m_X = \mathbf{E}\{X(t)\} = 1$.

a Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{X(1)+X(2)\geq 1\}$. **(1 poäng)**

b Bestäm kovariansfunktionen $r_Y(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{Y(t), Y(t+\tau)\}$ för processen $Y(t)=X(2t)$, och visa att $Y(t)$ är svagt stationär. **(1 poäng)**

c Ange kovariansfunktionen $r_Z(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{Z(t), Z(t+\tau)\}$ för processen $Z(t) = X(t)+Y(t) = X(t)+X(2t)$, och visa att $Z(t)$ ej är svagt stationär. **(1.5 poäng)**

d Enligt deluppgift **c** kan summan av två svagt stationära processer vara icke-stationär. Ange villkor på två processer $\{X_1(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ och $\{X_2(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ som garanterar att $X_1(t)+X_2(t)$ är svagt stationär då $X_1(t)$ och $X_2(t)$ är det. [Svaret "Villkoret $X_1(t)+X_2(t)$ svagt stationär." ger inga poäng.] **(1.5 poäng)**

Uppgift 2. En svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\}$ är insignal till två filter med impulssvar $h_1(u)$ resp. $h_2(u)$:

$$X(t) \to \boxed{\begin{array}{c}\text{filter 1}\\ \text{impulssvar } h_1(u)\end{array}} \to Y_1(t) \qquad X(t) \to \boxed{\begin{array}{c}\text{filter 2}\\ \text{impulssvar } h_2(u)\end{array}} \to Y_2(t).$$

a Visa att korskovariansfunktionen $r_{Y_1,Y_2}(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y_1(t), Y_2(t+\tau)\}$ ej beror av $t\in\mathbb{R}$. **(2.5 poäng)**

b Uttryck korsspektraltätheten $\mathcal{P}_{Y_1,Y_2}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_{Y_1,Y_2}(\tau)\, d\tau$ mha. $H_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f u}\, h_1(u)\, du$, $H_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f u}\, h_2(u)\, du$ och $\mathcal{P}_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_X(\tau)\, d\tau$ (samt matematiska operationer som integraler, summa, etc.). **(2.5 poäng)**

Uppgift 3. Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara en svagt stationär process med väntevärde $m_X = \mathbf{E}\{X(t)\}$ och kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\}$.

a Visa att $\mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\}$ ej beror av $t\in\mathbb{Z}$. **(2 poäng)**

b Visa att andramomentfunktionen $R_X(\tau) = \mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\}$ kan skrivas

$$R_X(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\, \mathcal{S}_X(f)\, df \quad \text{för} \quad \mathcal{S}_X(f) = \mathcal{P}_X(f) + m_X^2\delta(f) \quad \text{för } f\in[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}],$$

där $\mathcal{P}_X(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_X(\tau)$ och $\delta(x)$ är Diracs δ-distribution [given av att $\int_{-1/2}^{1/2} \delta(x)g(x)\, dx = g(0)$ för kontinuerliga funktioner $g(x)$]. **(2 poäng)**

$\boxed{\texttt{c}}$ Varför är (utom i specialfall) den så kallade korsspektraltätheten $\mathcal{S}_X(f)$ som figurerar i deluppgift $\boxed{\texttt{b}}$ ej en "riktig" spektraltäthet, dvs. varför satisfierar den ej det kriterium vi har för att något skall vara en spektraltäthet? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 4.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Bestäm variansen $\mathbf{Var}\{X(1)\}$ för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_X(\tau)\, d\tau = \frac{|f|}{(1+f^2)^{3/2}}$. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Bestäm spektraltätheten $\mathcal{P}_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_Y(\tau)\, d\tau$ för processen $Y(t) = \cos(\lambda t+\Psi)\, X(t)$, $t\in\mathbb{R}$, där λ är en konstant, $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en svagt stationär process med väntevärde $\mathbf{E}\{X(t)\} = 0$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_X(\tau)\, d\tau$, samt Ψ en s.v. oberoende av $X(t)$ likformigt fördelad över $[0,\pi]$. **(3.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 5.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Man observerar $Y(1),\ldots,Y(n)$ för processen $Y(t) = \mu+X(t)$, där μ är en okänd konstant och $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ en MA(1)-process med kända parametrar c_1 och σ^2. Gör ett approximativt konfidensintervall för μ. **(3 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Wienerfiltret för bortfiltrering av svagt stationärt brus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ från en brusstörd svagt stationär signal $\{S(t)+N(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ har frekvensfunktion $H(f) = \mathcal{P}_S(f)/[\mathcal{P}_S(f)+\mathcal{P}_N(f)]$, $f\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, där $\mathcal{P}_N(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_N(\tau)$ och $\mathcal{P}_S(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_S(\tau)$ är brusets resp. signalens spektraltätheter. Diskutera hur man i verkligheten kan skatta $H(f)$ om det går att göra oberoende observationer av dels bruset $\{N(t)\}_{t=1}^n$ och dels den brusstörda signalen $\{S(t)+N(t)\}_{t=1}^n$. [OBS: Det är ej samma realisering av $N(t)$ som figurerar i observationerena $\{N(t)\}_{t=1}^n$ av bruset och $\{S(t)+N(t)\}_{t=1}^n$ av den brusstörda signalen, så det går ej att subtrahera dem från varandra och få fram $S(t)$.] **(2 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6.}}$ Diskutera fem distinkta och rimligt substantiella upplevelser från arbetet med <u>ett</u> av projekten. [Ett projekt är 0.5 poäng, dvs. ca. två arbetsdagar, och bör därför lätt inge fem sådana upplevelser. Om så ej var fallet, förklara istället varför på fem sätt ... .]

Beskriv tex. upplevelser i form av olika problem som uppstod vid arbete med olika delmoment i projektet, som problem vid datorimplementeringar och/eller arbete med teorimoment. Eller upplevelser i form av undringar över olika modelleringsval som figurerar i projektet. Eller upplevelser i form av associationer projektet väckte till andra kursmoment under utbildningen. Eller upplevelser i form av reflektioner över relationer till resterande kursstoff i `StokProcE`. Etc. **(5 poäng)**

Vid examinering av Uppgift 6 ges ej poäng för att text mer eller mindre direkt kopieras från projektstencil till tentamenssvar. Inlämnade upplevelser skall vara så "djupa" att det framgår att projektet utförts på ett seriöst vis.

$\boxed{\texttt{Lycka till!}}$

Lösningar till tentamen i TMA 421 StokProcE den 18/12 - 02

$\boxed{\texttt{Uppgift 1.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Eftersom $X(1)+X(2)$ är N-fördelad blir $\mathbf{P}\{X(1)+X(2)\geq 1\} = 1-\Phi(\frac{1-\mathbf{E}\{X(1)+X(2)\}}{\sqrt{\mathbf{Var}\{X(1)+X(2)\}}}) = 1-\Phi(\frac{1-2}{\sqrt{2[r_X(0)+r_X(1)]}}) = 1-\Phi(\frac{-1}{\sqrt{2[1+\mathrm{e}^{-1}]}}) = \Phi(\frac{1}{\sqrt{2[1+\mathrm{e}^{-1}]}})$.

$\boxed{\texttt{b}}$ $r_Y(t,t+\tau) = \mathbf{Cov}\{Y(t),Y(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(2t),X(2(t+\tau))\} = r_X(2\tau)$. Eftersom $r_Y(t,t+\tau)$ och $m_Y(t)=1$ ej beror av t är $Y(t)$ svagt stationär.

$\boxed{\texttt{c}}$ $r_Z(t,t+\tau) = \mathbf{Cov}\{Z(t),Z(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t)+Y(t),\, X(t+\tau)+Y(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t)+X(2t),\, X(t+\tau)+X(2(t+\tau))\} = r_X(\tau)+r_X(t+2\tau)+r_X(\tau-t)+r_X(2\tau)$, som beror av t så att $Z(t)$ ej är svagt stationär.

$\boxed{\texttt{d}}$ $r_{X+Y}(t,t+\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t)+Y(t),\, X(t+\tau)+Y(t+\tau)\} = r_X(\tau)+r_{X,Y}(t,t+\tau)+r_{Y,X}(t,t+\tau)+r_Y(\tau)$, som ej beror av t omm. $r_{X,Y}(t,t+\tau)+r_{Y,X}(t,t+\tau)$ ej beror av t, vilket tex. är fallet om processerna $X(t)$ och $Y(t)$ är okorrelerade.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ $r_{Y_1,Y_2}(\tau) = \mathbf{Cov}\{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)X(t-u)\,du,\, \int_{-\infty}^{\infty} h_2(v)X(t+\tau-v)\,dv\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(v)\mathbf{Cov}\{X(t-u),X(t+\tau-v)\}\,dudv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(v)r_X(\tau-v+u)\,dudv$, som ej beror av t.

$\boxed{\texttt{b}}$ Enligt deluppgift $\boxed{\texttt{a}}$ är $r_{Y_1,Y_2}(\tau) = (h_1(-\cdot)\star h_2\star r_X)(\tau) \Rightarrow \mathcal{P}_{Y_1,Y_2}(f) = (\mathfrak{F}^{-1}r_{Y_1,Y_2})(f) = [\mathfrak{F}^{-1}(h_1(-\cdot)\star h_2\star r_X)](f) = (\mathfrak{F}^{-1}h_1(-\cdot))(f)\,(\mathfrak{F}^{-1}h_2)(f)\,(\mathfrak{F}^{-1}r_X)(f) = \overline{H_1(f)}\,H_2(f)\mathcal{P}_X(f)$, eftersom $(\mathfrak{F}^{-1}h_1)(f) = H_1(f) \Rightarrow (\mathfrak{F}^{-1}h_1(-\cdot))(f) = \overline{H_1(f)}$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ $\mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t),X(t+\tau)\}+\mathbf{E}\{X(t)\}\mathbf{E}\{X(t+\tau)\} = r_X(\tau)+m_X^2$.

$\boxed{\texttt{b}}$ $\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\mathcal{S}_X(f)\,df = \int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\mathcal{P}_X(f)\,df + m_X^2\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\,\delta(f)\,df = r_X(\tau)+m_X^2 = R_X(\tau)$.

$\boxed{\texttt{c}}$ $\mathcal{S}_X(f)$ är ej en funktion, utan en distribution, och därför ej en spektraltäthet.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Detta är Övning 6.1 i kompendiet, som räknats på räkneövningarna. Se lösning på `http://www.math.chalmers.se/ palbin/stokprocE.html`

$\boxed{\texttt{b}}$ Detta är Övning 6.3 i kompendiet, som räknats på räkneövningarna. Se lösning på `http://www.math.chalmers.se/ palbin/stokprocE.html`

$\boxed{\texttt{Uppgift 5.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Detta är Övning 9.4 i kompendiet, som är ett hemövningstal. Se lösning i kompendiet.

$\boxed{\texttt{b}}$ Detta är väsentligen uppgift 5.b från tentamen 981216. Se lösning i kompendiet.