Tentamen TMA 421 StokProcE den 23/4 - 03 kl. $8^{45}$-$13^{45}$ i V.

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, Beta, och Projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 031/772 3512.

ÖVNINGSTENTAMEN ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

EXAMINATIONSALTERNATIV 2: Uppgift 1 och 2 fungerar som övningstentamen, så att 40% på dessa uppgifter samt godkända projektredovisningar ger betyg 3.

TENTAMENSRESULTAT anslås i MD-husets källare, samt i E-huset.

Tentamina granskas, och ev. frågor eller klagomål på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning, på därför speciellt avsett formulär, som hänger på väggen i det lilla rummet mittemot mottagningen. Lämna ifyllt formulär där, så tar första lärare som kommer hand om det.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda (men ej överdrivet) fullständigt.

`Uppgift 1.` En svagt stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ har kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$ och väntevärdesfunktion $m_X = 1$.

`a` Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{X(1)+X(2)\geq 1\}$. **(1 poäng)**

`b` Ange kovariansfunktionen $r_Y(t,t+\tau)$ för processen $Y(t)=X(2t)$, och visa att $Y(t)$ är svagt stationär. **(1 poäng)**

`c` Ange kovariansfunktionen $r_Z(t,t+\tau)$ för processen $Z(t) = X(t)+Y(t) = X(t) +X(2t)$, och visa att $Z(t)$ ej är svagt stationär. **(1.5 poäng)**

`d` Enligt deluppgift `c` kan summan av två svagt stationära processer $X(t)$ och $Y(t)$ vara icke-stationär. Ange villkor på $X(t)$ och $Y(t)$ (som ej längre behöver vara de ovan definierade processerna) som garanterar att summan av processerna är svagt stationär då var och en av processerna är svagt stationär. (Svar av typ "$X(t)+Y(t)$ svagt stationär" ger inga poäng.) **(1.5 poäng)**

`Uppgift 2.` En svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ har kovariansfunktion

$$r_X(\tau) \;=\; \mathbf{Cov}\{X(t),X(t+\tau)\} \;=\; \sigma^2\sin(2\pi f_0\tau)/(\pi\tau)$$

där $f_0>0$ och $\sigma^2>0$ är konstanter. Väntevärdesfunktionen är $m_X=1$.

`a` Visa att $\sigma^2\sin(2\pi f_0\tau)/(\pi\tau)$ verkligen är en kovariansfunktion. **(1 poäng)**

`b` Bestäm autokovariansfunktionen $\mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\}$. **(1 poäng)**

`c` Processen $X$ är insignal till två filter med impulssvar $h_1$ resp. $h_2$:

$$X(t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{filter 1}\\ \text{impulssvar } h_1(u)\end{array}} \rightarrow Y_1(t) \qquad X(t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{filter 2}\\ \text{impulssvar } h_2(u)\end{array}} \rightarrow Y_2(t).$$

Förklara varför korskovariansfunktionen $r_{Y_1,Y_2}(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y_1(t),Y_2(t+\tau)\}$ ges av

$$r_{Y_1,Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(v)\,r_X(\tau-v+u)\;dudv. \qquad \textbf{(1.5 poäng)}$$

`d` Förklara varför, med självklara beteckningar, korsspektraltätheten ges av

$$\mathcal{P}_{Y_1,Y_2}(f) = \overline{H_1(f)}\,H_2(f)\,\mathcal{P}_X(f). \qquad \textbf{(1.5 poäng)}$$

`Uppgift 3.` Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara Gaussiskt diskret vitt brus med okänd varians $\sigma^2$. Bestäm konstanten $\mathcal{D}_n$ så att $(\sigma^2)^\star_n = \mathcal{D}_n[e(1)^2+\ldots+e(n)^2]$ är en vvr. skattning av $\sigma^2$. Beräkna $\mathbf{Var}\{(\sigma^2)^\star_n\}$ och gör ett konfidensintervall för $\sigma^2$. **(5 poäng)**

`Uppgift 4.` Man har observerat $X(t_1),\ldots,X(t_n)$, $0<t_1<\ldots<t_n$, för en process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med oberoende ökningar sådan att $X(0)=0$ och $\mathbf{E}\{X(t)^2\}<\infty$. Finn den linjära prediktor $P=\sum_{i=1}^n a_i X(t_i)$ av $X(t_{n+1})$ som minimerar $\mathbf{Var}\{X(t_{n+1})-P\}$ då $t_{n+1}>t_n$. **(5 poäng)**

`Uppgift 5.` Till en MA(1)-process $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med $c_1=2$ och $\sigma^2=1$ adderas oberoende diskret vitt brus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med varians 3. Den observerbara signalen $X=S+N$ skall filtreras med impulssvar $h$ så att $S(t)$ återskapas optimalt i meningen att utsignalen $Y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(t-k)$ minimerar $\mathbf{E}\{[Y(t)-S(t)]^2\}$. Finn det optimala impulssvaret $h$. **(5 poäng)**

`Uppgift 6.` Diskutera fem distinkta och rimligt substantiella upplevelser från arbetet med ett av projekten. [Ett projekt är 0.5 poäng, dvs. ca. två arbetsdagar, och bör därför lätt inge fem sådana upplevelser. Om så ej var fallet, förklara istället varför på fem sätt ... .]

Beskriv tex. upplevelser i form av olika problem som uppstod vid arbete med olika delmoment i projektet, som problem vid datorimplementeringar och/eller arbete med teorimoment. Eller upplevelser i form av undringar över olika modelleringsval som figurerar i projektet. Eller upplevelser i form av associationer projektet väckte till andra kursmoment under utbildningen. Eller upplevelser i form av reflektioner över relationer till resterande kursstoff i `StokProcE`. Osv. **(5 poäng)**

Vid examinering av Uppgift 6 ges ej poäng för att text mer eller mindre direkt kopieras från projektstencil till tentamenssvar. Inlämnade upplevelser skall vara så "djupa" att det framgår att projektet utförts på ett seriöst vis.

`Lycka till!`

# Lösningar till tentamen i TMA 421 StokProcE den 23/4 - 03

$\boxed{\texttt{Uppgift 1.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Eftersom $X(1)+X(2)$ är N-fördelad blir $\mathbf{P}\{X(1)+X(2)\geq 1\} = 1-\Phi(\frac{1-\mathbf{E}\{X(1)+X(2)\}}{\sqrt{\mathbf{Var}\{X(1)+X(2)\}}}) = 1-\Phi(\frac{1-2}{\sqrt{2[r_X(0)+r_X(1)]}}) = 1-\Phi(\frac{-1}{\sqrt{2[1+\mathrm{e}^{-1}]}}) = \Phi(\frac{1}{\sqrt{2[1+\mathrm{e}^{-1}]}})$.

$\boxed{\texttt{b}}$ $r_Y(t,t+\tau) = \mathbf{Cov}\{Y(t),Y(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(2t),X(2(t+\tau))\} = r_X(2\tau)$. Eftersom $r_Y(t,t+\tau)$ och $m_Y(t)=1$ ej beror av $t$ är $Y(t)$ svagt stationär.

$\boxed{\texttt{c}}$ $r_Z(t,t+\tau) = \mathbf{Cov}\{Z(t),Z(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t)+Y(t),\, X(t+\tau)+Y(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t)+X(2t),\, X(t+\tau)+X(2(t+\tau))\} = r_X(\tau)+r_X(t+2\tau)+r_X(\tau-t)+r_X(2\tau)$, som beror av $t$ så att $Z(t)$ ej är svagt stationär.

$\boxed{\texttt{d}}$ $r_{X+Y}(t,t+\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t)+Y(t),\, X(t+\tau)+Y(t+\tau)\} = r_X(\tau)+r_{X,Y}(t,t+\tau)+r_{Y,X}(t,t+\tau)+r_Y(\tau)$, som ej beror av $t$ omm. $r_{X,Y}(t,t+\tau)+r_{Y,X}(t,t+\tau)$ ej beror av $t$, vilket tex. är fallet om processerna $X(t)$ och $Y(t)$ är okorrelerade.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2.}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Eftersom $r(\tau) = \sigma^2\sin(2\pi f_0\tau)/(\pi\tau) = \int_{-f_0}^{f_0}\mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\sigma^2\,df = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\mathcal{P}(f)\,df$, där $\mathcal{P}(f)=\sigma^2$ för $|f|\leq f_0$ är icke-negativ, integrerbar och symmetrisk [dvs. $\mathcal{P}(f)$ är en spektraltäthet], så är $\mathcal{P}$'s Fouriertransform $r(\tau)$ en kvf.

$\boxed{\texttt{b}}$ $\mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t),X(t+\tau)\}+\mathbf{E}\{X(t)\}\mathbf{E}\{X(t+\tau)\} = r_X(\tau)+m_X^2 = \sigma^2\sin(2\pi f_0\tau)/(\pi\tau)+1$.

$\boxed{\texttt{c}}$ $r_{Y_1,Y_2}(\tau) = \mathbf{Cov}\{\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)X(t-u)\,du,\, \int_{-\infty}^{\infty}h_2(v)X(t+\tau-v)\,dv\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)\, h_2(v)\mathbf{Cov}\{X(t-u),X(t+\tau-v)\}\,dudv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)h_2(v)r_X(\tau-v+u)\,dudv$.

$\boxed{\texttt{d}}$ Enligt deluppgift $\boxed{\texttt{c}}$ är $r_{Y_1,Y_2}(\tau) = (h_1(-\cdot)\star h_2\star r_X)(\tau)$, så att $\mathcal{P}_{Y_1,Y_2}(f) = (\mathfrak{F}^{-1}r_{Y_1,Y_2})(f) = [\mathfrak{F}^{-1}(h_1(-\cdot)\star h_2\star r_X)](f) = (\mathfrak{F}^{-1}h_1(-\cdot))(f)\,(\mathfrak{F}^{-1}h_2)(f)\,(\mathfrak{F}^{-1}r_X)(f) = \overline{H_1(f)}\,H_2(f)\mathcal{P}_X(f)$, eftersom $(\mathfrak{F}^{-1}h_1)(f) = H_1(f) \Rightarrow (\mathfrak{F}^{-1}h_1(-\cdot))(f) = \overline{H_1(f)}$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3.}}$ Detta är övning 9.2 i kompendiet. Se lösning i kompendiet.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4.}}$ Detta är övning 9.20 i kompendiet: Mha. enkla algebraiska manipulationer erhålles [kom ihåg att $X(0)=0$]

$$
\begin{aligned}
&X(t_{n+1})-P\\
&= X(t_{n+1})-a_nX(t_n)-a_{n-1}X(t_{n-1})-a_{n-2}X(t_{n-2})-\ldots-a_1X(t_1)\\
&= [X(t_{n+1})-X(t_n)]-(a_n-1)X(t_n)-a_{n-1}X(t_{n-1})-a_{n-2}X(t_{n-2})-\ldots-a_1X(t_1)\\
&= [X(t_{n+1})-X(t_n)]-(a_n-1)[X(t_n)-X(t_{n-1})]-(a_{n-1}+a_n-1)X(t_{n-1})\\
&\quad -a_{n-1}X(t_{n-1})-\ldots-a_1X(t_1)\\
&= [X(t_{n+1})-X(t_n)]-(a_n-1)[X(t_n)-X(t_{n-1})]-(a_{n-1}+a_n-1)[X(t_{n-1})-X(t_{n-2})]\\
&\quad -(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-1)X(t_{n-2})-\ldots-a_1X(t_1)\\
&\qquad\vdots\\
&= [X(t_{n+1})-X(t_n)]-(a_n-1)[X(t_n)-X(t_{n-1})]-(a_{n-1}+a_n-1)[X(t_{n-1})-X(t_{n-2})]\\
&\quad -(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-1)[X(t_{n-2})-X(t_{n-3})]-\ldots-(a_1+\ldots+a_n-1)X(t_1)\\
&= [X(t_{n+1})-X(t_n)]-(a_n-1)[X(t_n)-X(t_{n-1})]-(a_{n-1}+a_n-1)[X(t_{n-1})-X(t_{n-2})]\\
&\quad -(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-1)[X(t_{n-2})-X(t_{n-3})]-\ldots-(a_1+\ldots+a_n-1)[X(t_1)-X(0)].
\end{aligned}
$$

Eftersom termerna i högerledet är oberoende följer att $\mathbf{Var}\{[X(t_{n+1})-P]^2\}$ ges av

$$\mathbf{Var}\{X(t_{n+1})-X(t_n)\}+(a_n-1)^2\mathbf{Var}\{X(t_n)-X(t_{n-1})\}+(a_{n-1}+a_n-1)^2 \\ \times\mathbf{Var}\{X(t_{n-1})-X(t_{n-2})\}+\ldots+(a_1+\ldots+a_n-1)^2\mathbf{Var}\{X(t_1)-X(0)\}.$$

Uppenbart är detta uttryck alltid större eller lika med $\mathbf{Var}\{X(t_{n+1})-X(t_n)\}$. Å andra sidan antar uttrycket detta värde då $a_n=1$ och $a_{n-1}=\ldots=a_1=0$. Detta val av koefficienter ger alltså den optimala prediktorn.

`Uppgift 5.` Detta är övning 8.22 i kompendiet. Se lösning i kompendiet.