Tentamen TMA 421 StokProcE den 18/8 - 03 kl. 14^{15}-19^{15} i V.

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, Beta, och Projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 031/772 3512.

ÖVNINGSTENTAMEN ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

EXAMINATIONSALTERNATIV 2: Uppgift 1 och 2 fungerar som övningstentamen, så att 40% på dessa uppgifter samt godkända projektredovisningar ger betyg 3.

TENTAMENSRESULTAT anslås i MD-husets källare, samt meddelas via `email` för de som anger `email`-adress.

Tentamina granskas, och ev. frågor eller klagomål på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning, på därför speciellt avsett formulär, som hänger på väggen i det lilla rummet mittemot mottagningen. Lämna ifyllt formulär där, så tar första lärare som kommer hand om det.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda fullständigt, men ej överdrivet så.

`Uppgift 1.` Ange en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med vvf. $m_X=1$ och kvf. $r_X(0)=3$, $r_X(\pm1)=2$, $r_X(\pm2)=1$ och $r_X(k)=0$ f.ö. **(5 poäng)**

`Uppgift 2.` Beräkna $\mathbf{E}\{X(t)^2X(t+\tau)^2\}$ för en stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med vvf. $m_X=0$ och kvf. $r_X(\tau)$. **(5 poäng)**

`Ledning.` Skriv $X(t+\tau)$ som summan av de stokastiska variablerna $X(t+\tau)-\frac{r_X(\tau)}{r_X(0)}X(t)$ och $\frac{r_X(\tau)}{r_X(0)}X(t)$. Visa och utnyttja att dessa variabler är oberoende.

`Uppgift 3.` Bestäm spektraltätheten för en svagt stationär process $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sådan att $X(k)+\sum_{\ell=1}^{p}a_\ell X(k-\ell) = e(k)+\sum_{\ell=1}^{q}c_\ell e(k-\ell)$ för $k\in\mathbb{Z}$, där $\{e(\ell)\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus och $a_1,\ldots,a_p,c_1,\ldots,c_q\in\mathbb{R}$. **(5 poäng)**

`Uppgift 4.` Låt $r(0)=a$, $r(1)=b$, $r(-1)=c$ och $r(k)=0$ f.ö. För vilka värden på a,b,c är $r(k)$, $k\in\mathbb{Z}$, kvf. för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$? **(5 poäng)**

`Uppgift 5.` Man har observerat $X(t_1),\ldots,X(t_n)$ för en process $\{X(t)\}_{t\geq0}$ med oberoende ökningar, $X(0)=0$ och $\mathbf{E}\{X(t)^2\}<\infty$. Finn den prediktor $P=\sum_{i=1}^{n}a_i\,X(t_i)$ av $X(t_{n+1})$ som minimerar $\mathbf{Var}\{X(t_{n+1})-P\}$, $0<t_1<\ldots<t_{n+1}$. **(5 poäng)**

Uppgift 6 - Projekt 1. a Fordon anländer till en bro med exp $(1/2)$-fördelade tidsmellanrum, och befinner sig på bron under en halv tidsenhet. Antalet fordon på bron vid tiden $t\in\mathbb{R}$ är hagelbrus $X(t)$ med $\lambda=\frac{1}{2}$, samt $g(t)=1$ för $t\in[0,\frac{1}{2}]$ och $g(t)=0$ f.ö. Skriv ett program (i något existerande eller påhittat programspråk) som simulerar en realisering av $\{X(t)\}_{t\in[0,10]}$ och visar resultatet i figur. **(2 poäng)**

b Betrakta den stationära Gaussiska processen

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t+s)\,dW(s) \quad \text{där} \quad h(t)=1-|t| \text{ för } |t|\leq 1 \quad \text{och} \quad h(t)=0 \text{ f.ö.}$$

Skriv ett program som mha. simulering skattar $\mathbf{P}\{\max_{t\in[0,10]}X(t)\geq 3\}$. **(3 poäng)**

Ledning: Då en realisering av $X(t)$ simulerats kan $\max_{t\in[0,10]}X(t)$ beräknas med ett kommando av typ `Max[X[t],{t,0,10}]`.

Uppgift 6 - Projekt 2. a En signal $\{D(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, som består av oberoende likafördelade s.v. med möjliga värden $\{0,1,\ldots,1023\}$, alla med samma sannolikhet

$\mathbf{P}\{D(k)=j\} = \frac{1}{1024}$, är insignal till en modulator med utsignal

$$S(t) = j \quad \text{om} \quad D(k) = j \qquad \text{för} \quad j \in \{0,1,\ldots,1023\} \quad \text{och} \quad k \le t < k+1.$$

Till $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ adderas svagt stationärt brus $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med vvf. $m_W=0$. Den mottagna signalen $X(t) = S(t)+W(t)$ är insignal till en demodulator med utsignal

$$Y(k) = \int_k^{k+1} X(t)\,dt = \int_k^{k+1} S(t)\,dt + \int_k^{k+1} W(t)\,dt = D(k) + N(k) \qquad \text{för} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Mha. $Y(k)$ fattar beslutskretsen beslutet $\hat{D}(k)$ [rörande värdet av $D(k)$] enligt

$$\hat{D}(k) = \begin{cases} 1023 & \text{om} \quad 1022.5 < Y(k) \\ j & \text{om} \quad j-\frac{1}{2} < Y(k) \le j+\frac{1}{2}, \quad \text{för} \;\; j\in\{1,\ldots,1022\} \\ 0 & \text{om} \quad Y(k) \le \frac{1}{2} \end{cases}.$$

En ganska enkel beräkning visar att sannolikheten för fel beslut ges av

$$\mathbf{P}\{\hat{D}(k)\neq D(k)\} \;=\; \frac{1}{1024}\Big(\mathbf{P}\{N(k)>\tfrac{1}{2}\} + \sum_{j=1}^{1022}\mathbf{P}\{|N(k)|>\tfrac{1}{2}\} + \mathbf{P}\{N(k)<-\tfrac{1}{2}\}\Big).$$

Beräkna $\mathbf{P}\{\hat{D}(k)\neq D(k)\}$ då $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är Gaussisk med kvf. $r_W(\tau) = \mathrm{e}^{-5|\tau|}$.

(2.5 poäng)

$\boxed{\mathbf{b}}$ Betrakta Uppgift 6 a igen, men antag nu ej att $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är Gaussisk. Brustermerna $\{N(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ i den demodulerade signalen $Y(k) = D(k)+N(k)$ blir då ej normalfördelade, men antages fortfarande vara oberoende.

Man har genom sändningsprov erhållit observationer $\{n(k)\}_{k=1}^{10000}$ av bruset $\{N(k)\}_{k=1}^{10000}$. Skriv ett program (i något existerande eller påhittat programspråk) som

- skapar observationer $\{d(k)\}_{k=1}^{10000}$ av signalvärdena $\{D(k)\}_{k=1}^{10000}$,
- skapar observationer $\{y(k)\}_{k=1}^{10000}$ av den demodulerade signalen $\{Y(k)\}_{k=1}^{10000}$,
- skapar observationer $\{\hat{d}(k)\}_{k=1}^{10000}$ av besluten $\{\hat{D}(k)\}_{k=1}^{10000}$,
- skapar observationer $\{g(k)\}_{k=1}^{10000}$ av felen $G(k) = \begin{cases} 1 & \text{då } \hat{D}(k)\neq D(k) \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$,
- gör ett konfidensintevall för bitfelssannolikheten $P_b = \mathbf{P}\{\hat{D}(k)\neq D(k)\}$ mha. observationen $\hat{p}_b = \frac{1}{10000}\sum_{k=1}^{10000} g(k)$ av bitfelsskattaren $\hat{P}_b = \frac{1}{10000}\sum_{k=1}^{10000} G(k)$.

Använd t.ex. kommandot

```
d <- as.integer(runif(10000,1,1024))
```

för att skapa vektorn $d = (d(1),\ldots,d(10000))$, och (t.ex.)

```
n <- source(ndata10000.dat")
```

för att läsa in brusobservationer till vektorn $n = (n(1),\ldots,n(10000))$. **(2.5 poäng)**

`Ledning.` Formeln (3) för konfidensintervall i projektstencilen gäller även vid 1024 värden, ty den utnyttjar CGS. och att $G(m)$ är en $\{0,1\}$-värd s.v. med $\mathbf{P}\{G(m)=1\} = 1-\mathbf{P}\{G(m)=0\} = P_b$, vilket fortsatt är fallet. [Sätt gärna $\Delta=2$ eller 3 i (3).]

`Lycka till!`

Lösningar till tentamen i TMA 421 StokProcE den 18/8 - 03

$\boxed{\texttt{Uppgift 1.}}$ Detta är övning 8.2 i kompendiet, förutom att den ej kräver $m_X=0$. Tag lösningen till denna övning i kompendiet, som har väntevärde 0, och addera 1.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2.}}$ Detta är övning 4.10 i kompendiet: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3.}}$ Detta är övning 7.9 i kompendiet: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4.}}$ Vi beräknar inverstransformen

$$\mathcal{P}(f) = (\mathfrak{F}^{-1}r)(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi fk}\, r(k) = a + (c+b)\cos(2\pi f) + (c-b)\, i \sin(2\pi f).$$

För att $\mathcal{P}(f)$ skall vara symmetrisk krävs att $b=c$. Då är $\mathcal{P}(f) = a+2b\cos(2\pi f)$ icke-negativ för $|2b|\leq a$. Dessa två villkor tillsammans är svaret.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5.}}$ (Övning 9.20 i kompendiet.) Enkla algebraiska manipulationer ger

$$\begin{aligned} &X(t_{n+1})-P \\ &= [X(t_{n+1})-X(t_n)]-(a_n-1)[X(t_n)-X(t_{n-1})]-(a_{n-1}+a_n-1)[X(t_{n-1})-X(t_{n-2})] \\ &\quad -(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-1)[X(t_{n-2})-X(t_{n-3})]-\ldots-(a_1+\ldots+a_n-1)[X(t_1)-X(0)] \end{aligned}$$

$[X(0)=0]$. Då termerna i högerledet är oberoende ges $\mathbf{Var}\{[X(t_{n+1})-P]^2\}$ av

$$\begin{aligned} &\mathbf{Var}\{X(t_{n+1})-X(t_n)\}+(a_n-1)^2\mathbf{Var}\{X(t_n)-X(t_{n-1})\}+(a_{n-1}+a_n-1)^2 \\ &\quad \times\mathbf{Var}\{X(t_{n-1})-X(t_{n-2})\}+\ldots+(a_1+\ldots+a_n-1)^2\mathbf{Var}\{X(t_1)-X(0)\}. \end{aligned}$$

Detta uttryck är minst $\mathbf{Var}\{X(t_{n+1})-X(t_n)\}$; ett värde som antages då $a_n=1$ och $a_{n-1}=\ldots=a_1=0$. Detta val av koefficienter är alltså optimalt.

$\boxed{\textbf{Uppgift 6 - Projekt 1.}}$ $\boxed{\text{a}}$ Del av Programmeringsuppgift 1: se lösning i kompendiet.

$\boxed{\textbf{b}}$ I Programmeringsuppgift 2 simuleras $X(t)$, se lösning i kompendiet. Då n realiseringar $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ av $X(t)$ simulerats kan $\mathbf{P}\{\max_{t\in[0,10]} X(t)\geq 3\}$ skattas med den andel av realiseringarna som uppfyller $\max_{t\in[0,10]} X_i(t)\geq 3$.

$\boxed{\textbf{Uppgift 6 - Projekt 2.}}$ $\boxed{\text{a}}$ $\mathbf{P}\{\hat{D}(k)\neq D(k)\} = \frac{1023}{1024}\mathbf{P}\{|N(k)|>\frac{1}{2}\} = \frac{1023}{512}(1-\Phi(\frac{1}{2}/\sigma_{N(k)}))$, där $\sigma^2_{N(k)} = \mathbf{Var}\{N(k)\} = \int_k^{k+1}\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-5|t-s|}\,dsdt = 2\int_{t=k}^{t=k+1}[\int_{s=k}^{s=t}\mathrm{e}^{5(s-t)}\,ds]\,dt = 2\int_{t=k}^{t=k+1}\frac{1}{5}(1-\mathrm{e}^{-5(t-k)})\,dt = \frac{2}{5}[1-\frac{1}{5}(1-\mathrm{e}^{-5})]$.

$\boxed{\textbf{b}}$ Ändra lite i programmet från projekt 2.