Tentamen i stokastiska processer den 17/12 - 03 kl. 8^{45}-13^{45}

Hjälpmedel: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
Lärare: Patrik Albin 772 3512.
Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Det meddelas via `email`-listan då tentamensresultatet föreligger, och var det anslås. Lösningar till tentamen läggs ut på kurshemsidan kort efter tentamens slut.

Tentamina granskas, och ev. frågor eller klagomål på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning, på därför speciellt avsett formulär, som finns i hängande på väggen i det lilla rummet mittemot mottagningen. Lämna ifyllt formulär där, så tar första lärare som kommer hand om det.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda (men ej överdrivet) fullständigt.

Observera: I tentamenstesen, och i kursen, är diskret vitt brus en svagt stationär process $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med kovariansfunktion $r_e(\tau) = \mathbf{Cov}\{e(t), e(t+\tau)\} = \sigma^2\delta(\tau)$ (Kroneckers δ), för någon konstant $\sigma^2 > 0$, och väntevärde $m_e = \mathbf{E}\{e(t)\} = 0$. [Här ges Kroneckers δ-funktion $\delta:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ av $\delta(t)=1$ för $t=0$ och $\delta(t)=0$ för $t\neq 0$.]

`Uppgift 1` `a` En Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ har väntevärdesfunktion $m_X(t) = \mathbf{E}\{X(t)\} = t$ och kovariansfunktion $r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = \delta(t-s)$ (Kroneckers δ). Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{X(2) > X(1)+2\}$. **(1 poäng)**

`b` Avgör om processen $Y(t) = X(t) - t$, $t \in \mathbb{Z}$, är stationär, där $X(t)$ är processen i uppgift 1 a. **(1 poäng)**

`c` Avgör om processerna $X(t)$ och $Y(t) = X(-t)$ är stationärt korrelerade, där $X(t)$ är processen i uppgift 1 a. **(2 poäng)**

`d` Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara diskret vitt brus. Bestäm utan räkningar sannolikheten $\mathbf{P}\{e(2) > e(1)\}$ då brusprocessen $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är Gaussisk, samt sannolikheten $\mathbf{P}\{e(2) > e(1)+2\}$ då varje $e(t)$ är likformigt fördelad över $[-1,1]$. **(1 poäng)**

`Uppgift 2` Diskret vitt brus $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är insignal till ett filter med impulssvar $h_1(k)$ och utsignal $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$. Processen $Y(t)$ är insignal till ett filter med impulssvar $h_2(\ell)$ och utsignal $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)\, e(t-k) \qquad \text{och} \qquad Z(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_2(\ell)\, Y(t-\ell) \qquad \text{för} \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$e(t) \to \boxed{\text{impulssvar } h_1(k)} \to Y(t) \to \boxed{\text{impulssvar } h_2(\ell)} \to Z(t)$$

`a` Visa att korskovariansfunktionen $r_{Y,Z}(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y(t), Z(t+\tau)\}$ ges av

$$r_{Y,Z}(\tau) = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_2(\tau+k-\ell) h_1(k) h_1(\ell). \qquad \textbf{(1.5 poäng)}$$

`b` Visa att, med självklara beteckningar, korsspektraltätheten $\mathcal{P}_{Y,Z}(f) = (\mathfrak{F}^{-1} r_{Y,Z})(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\, r_{Y,Z}(\tau)$ för processerna $Y(t)$ och $Z(t)$ i uppgift 2 a ges av

$$\mathcal{P}_{Y,Z}(f) = H_2(f)\, |H_1(f)|^2\, \sigma^2 \qquad \text{för} \quad |f| < \tfrac{1}{2}. \qquad \textbf{(1.5 poäng)}$$

`c` Uttryck variansen $\mathbf{Var}\{Z(t)\}$ mha. σ^2 samt summor involverande impulssvaren h_1 och h_2. **(2 poäng)**

Uppgift 3 Vid mobiltelefoni avkodas en mottagen signal $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ som de filterkoefficienter $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ som gör att $\hat{e}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kX(t-k)$, $t\in\mathbb{Z}$, blir tidsdiskret vitt brus. (Koefficienterna $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är alltså den överförda informationen!)

a Visa att om $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ är en MA(1)-process $X(t)=\sum_{k=0}^{1}c_ke(t-k)=e(t)+c_1e(t-1)$, där $|c_1|<1$, så fungerar $a_k=(-c_1)^k$, $k\geq 0$, som avkodningskoefficienter. **(1.5 poäng)**

b Låt $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vara en AR(1)-process, så att $\sum_{k=0}^{1}a_kX(t-k)$ är tidsdiskret vitt brus, dvs. endast filterkoefficienterna $a_0=1$ och a_1 behövs.

Visa att om $X(k)$ störs av additivt oberoende tidsdiskret vitt brus $\{e(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, så blir utsignalen från filtret $Y(t)=\sum_{k=0}^{1}a_k[X(t-k)+e(t-k)]$ summan av en MA(1)-process och ett oberoende tidsdiskret vitt brus. Beräkna även kovariansfunktionen för $Y(k)$. **(2 poäng)**

c Motivera att utsignalen $Y(t)$ i uppgift 3 b [som där visas vara summan av en MA(1)-process och ett oberoende diskret vitt brus], faktiskt själv också är en MA(1)-process. Utnyttja därvid gärna nedan bifogade `Mathematica`-kod. **(1.5 poäng)**

```
In[2]:= Solve[{sig1^2 (1 + c1^2) + sig2^2 == signy^2 (1 + cny1^2), sig1^2 c1 == signy^2 cny1}, {cny1, signy}]
```

Out[2]=

$$\Big\{\Big\{\mathrm{cny1}\to\frac{\mathrm{sig1}^2+\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2+\mathrm{sig2}^2-\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}{2\,\mathrm{c1}\,\mathrm{sig1}^2},$$

$$\mathrm{signy}\to-\sqrt{\frac{\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{sig2}^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}\Big\},$$

$$\Big\{\mathrm{cny1}\to\frac{\mathrm{sig1}^2+\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2+\mathrm{sig2}^2-\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}{2\,\mathrm{c1}\,\mathrm{sig1}^2},$$

$$\mathrm{signy}\to\sqrt{\frac{\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{sig2}^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}\Big\},$$

$$\Big\{\mathrm{cny1}\to\frac{\frac{\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{sig2}^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}{\mathrm{c1}\,\mathrm{sig1}^2},$$

$$\mathrm{signy}\to-\frac{\sqrt{\mathrm{sig1}^2+\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2+\mathrm{sig2}^2-\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}}{\sqrt{2}}\Big\},$$

$$\Big\{\mathrm{cny1}\to\frac{\frac{\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2}{2}+\frac{\mathrm{sig2}^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}{\mathrm{c1}\,\mathrm{sig1}^2},$$

$$\mathrm{signy}\to\frac{\sqrt{\mathrm{sig1}^2+\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2+\mathrm{sig2}^2-\sqrt{-4\,\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^4+(-\mathrm{sig1}^2-\mathrm{c1}^2\,\mathrm{sig1}^2-\mathrm{sig2}^2)^2}}}{\sqrt{2}}\Big\}\Big\}$$

Uppgift 4 a En stokastisk process är som bekant en funktion $X(\omega,t)$, av utfallet av ett slumpförsök ω och av tiden t, så att processvärden är både stokastiska och tidsberoende. Speciellt är en vanlig deterministisk funktion $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ en tidsdiskret ("icke-stokastisk") stokastisk process $X(\omega,t)=f(t)$, $t\in\mathbb{Z}$, utan ω-beroende.

Utred vilka vanliga funktioner $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ som är diskret vitt brus. **(1 poäng)**

b Låt $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ och $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vara oberoende sviter av oberoende stokastiska variabler, sådana att varje ξ_k är N$(0,1)$-fördelad och varje η_k exp(1)-fördelad.

Avgör om den stokastiska processen $\{\hat{e}(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ given av $\hat{e}(2k)=\xi_k$ och $\hat{e}(2k+1)=\eta_k-\frac{1}{2}$ för $k\in\mathbb{Z}$ är svagt stationär. **(1 poäng)**

c Avgör om processen $\{\hat{e}(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ i uppgift 4 b är stationär. **(1 poäng)**

d Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara bandbegränsat vitt brus med kovariansfunktion $r_X(\tau) = \sigma^2\mathrm{sinc}(2\pi\tau) = \sigma^2\sin(2\pi\tau)/(2\pi\tau)$ för $\tau\neq 0$ och $r_X(0)=\sigma^2$ $[=\lim_{\tau\to 0} r_X(\tau)]$. Förklara hur man mha. processen $X(t)$ kan skapa tidsdiskret vitt brus. **(2 poäng)**

Uppgift 5 **a** Låt ξ och $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara oberoende stokastiska variabler, med ξ likformigt fördelad över intervallet $[-1,1]$, och varje N_k N$(0,1)$-fördelat. Visa att processen $e(t) = \mathrm{sign}(N_t)\,\xi$, $t\in\mathbb{Z}$, är diskret vitt brus. **(1.5 poäng)**

b Är olika processvärden för bruset $e(t)$ i uppgift 5 a oberoende? **(1 poäng)**

c Bruset $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ i uppgift 5 a är insignal till ett filter med impulssvar $h(0) = h(1) = 1$ och $h(k)=0$ för övrigt. Bestäm kovariansfunktionen $r_Y(s,t)$ och väntevärdesfunktionen $m_Y(t)$ för utsignalen $Y(t) = (h\star e)(t)$ från filtret. **(1 poäng)**

d Beskriv fördelningen för utsignalen $Y(t)$ från filtret i uppgift 5 c i en tidpunkt $t\in\mathbb{Z}$. Det går naturligtvis att beräkna fördelningsfuktionen $F_{Y(t)}(x) = \mathbf{P}\{Y(t)\leq x\}$, men kan vara enklare att resonera mera kvalitativt. **(1.5 poäng)**

Uppgift 6 (projekt 1) **a** Visa mha. någon slags programkod, hur man mha. simulering kan skatta väntevärdet av den stokastiska variablen $\max_{t\in[0,10]} X(t)$, för hagelbrusprocessen $X(t)$ i programeringsuppgift 1. **(2.5 poäng)**

b Ange två olika metoder att avgöra numeriskt, mha. dator, hur många gånger en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är deriverbar. Förklara vad som krävs för att man skall kunna implementera metoderna, t.ex. i fråga om simulering av processen eller kännedom om kovariansstruktur, etc. **(2.5 poäng)**

Uppgift 6 (projekt 2) **a** I många tillämpningar modelleras vitt brus i kontinuerlig tid som en svagt stationär stokastisk proces $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_X(t) = r_0\delta(t)$ (Diracs δ-distribution), där $r_0 > 0$ är en konstant. [Här ges Diracs δ-distribution av $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$ för kontinuerliga funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.]

Diskutera fyra aspekter av detta val av vitt brus $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Diskutera t.ex. existensproblem, relationen till bandbegränsat vitt brus, spektralaspekter, och hur detta brus kan realiseras (dvs. skapas) approximativt. **(2 poäng)**

b Låt det vita bruset $X(t)$ i uppgift 6 a vara insignal till ett filter med impulssvar $h(t)$. Uttryck variansen $\mathbf{Var}\{Y(t)\}$, kovariansfunktionen $r_Y(\tau)$, samt korskovariansen $r_{X,Y}(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), Y(t+\tau)\}$ mha. impulssvaret och integraler. **(3 poäng)**

Lycka till!

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 17/12

`Uppgift 1` `a` $\mathbf{P}\{X(2) > X(1)+2\} = \mathbf{P}\{X(2)-X(1) > 2\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2) > 2\} = 1-\Phi(\frac{2-\mu}{\sigma})$ där $\mu = \mathbf{E}\{X(2)-X(1)\} = m_X(2)-m_X(1) = 1$ och $\sigma^2 = \mathbf{Var}\{X(2)-X(1)\} = \mathbf{Var}\{X(2)\} - 2\,\mathbf{Cov}\{X(1),X(2)\} + \mathbf{Var}\{X(1)\} = r_X(2,2) - 2r_X(1,2)+r_X(1,1) = 2$.

`b` Eftersom $r_Y(s,t) = r_X(s,t) = \delta(t-s)$ endast beror av skillnaden $t-s$ och $m_Y(t) = \mathbf{E}\{X(t)-t\} = m_X(t)-t = 0$ ej beror av t, så är $Y(t)$ svagt stationär. Då $Y(t)$ är Gaussisk följer att $Y(t)$ är stationär.

`c` $r_{X,Y}(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s),Y(t)\} = \mathbf{Cov}\{X(s),X(-t)\} = r_X(s,-t) = \delta((-t)-s) = \delta(-(t+s))$ är ej en funktion av endast skillnaden $t-s$, så $X(t)$ och $Y(t)$ är ej stationärt korrelerade.

`d` I första fallet är $\mathbf{P}\{e(2)>e(1)\} = \mathbf{P}\{e(2)-e(1)>0\} = \frac{1}{2}$ eftersom $e(2)-e(1)$ är kontinuerligt (Gaussiskt) fördelad, och i andra fallet är $\mathbf{P}\{e(2)>e(1)+2\} = 0$ eftersom $e(2)$ och $e(1)$ båda tar värden i intervallet $[-1,1]$.

`Uppgift 2` `a` Enligt filterteori är $r_{Y,Z}(\tau) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_2(\ell) r_Y(\tau-\ell)$ och $r_Y(\tau) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_1(k_1)h_1(k_2)r_e(\tau+k_1-k_2)$, så $r_{Y,Z}(\tau) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_2(\ell)h_1(k_1)h_1(k_2)r_e(\tau-\ell+k_1-k_2) = \sigma^2\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_2(\tau+k_1-k_2)h_1(k_1)h_1(k_2)$.

`b` Enligt filterteori är $\mathcal{P}_{Y,Z}(f) = H_2(f)\mathcal{P}_Y(f)$ och $\mathcal{P}_Y(f) = |H_1(f)|^2\mathcal{P}_e(f) = |H_1(f)|^2\sigma^2$, så att $\mathcal{P}_{Y,Z}(f) = H_2(f)|H_1(f)|^2\sigma^2$.

`c` Enligt filterteori är $\mathcal{P}_Z(f) = |H_2(f)|^2\mathcal{P}_Y(f) = |H_2(f)|^2|H_1(f)|^2\mathcal{P}_e(f) = |H_2(f)|^2|H_1(f)|^2\sigma^2$, så att $r_Z(\tau) = (h_2 \star h_2(-\cdot)\star h_1\star h_1(-\cdot))(\tau)\,\sigma^2$ och $\mathbf{Var}\{Z(t)\} = r_Z(0) = (h_2\star h_2(-\cdot)\star h_1\star h_1(-\cdot))(0)\,\sigma^2 = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty} h_1(k_1)h_1(k_2)h_2(\ell_1)h_2(\ell_1-k_2+k_1)\,\sigma^2$.

`Uppgift 3` `a` $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X(t-k) = \sum_{k=0}^{\infty}(-c_1)^k[e(t-k)+c_1e(t-k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty}(-c_1)^k e(t-k) - \sum_{k=0}^{\infty}(-c_1)^{k+1}e(t-k-1) = \sum_{k=0}^{\infty}(-c_1)^k e(t-k) - \sum_{\ell=1}^{\infty}(-c_1)^{\ell}e(t-\ell) = (-c_1)^0 e(t) = e(t)$.

`b` Eftersom $\sum_{k=0}^{1} a_k X(t-k) = \hat{e}(t)$ är tidsdiskret vitt brus, så är $Y(t) = \sum_{k=0}^{1} a_k[X(t-k)+e(t-k)] = \sum_{k=0}^{1} a_k X(t-k) + \sum_{k=0}^{1} a_k e(t-k) = \hat{e}(t)+\hat{X}(t)$ där $\hat{X}(t) = \sum_{k=0}^{1} a_k e(t-k) = \sum_{k=0}^{1} c_k e(t-k)$ är en MA(1)-process med $c_0=a_0=1$ och $c_1=a_1$. Vidare är $r_Y(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y(t),Y(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{\hat{e}(t)+\hat{X}(t),\hat{e}(t+\tau)+\hat{X}(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{\hat{e}(t),\hat{e}(t+\tau)\} + \mathbf{Cov}\{\hat{e}(t),\hat{X}(t+\tau)\} + \mathbf{Cov}\{\hat{X}(t),\hat{e}(t+\tau)\} + \mathbf{Cov}\{\hat{X}(t),\hat{X}(t+\tau)\} = \sigma_2^2\delta(\tau)+0+0+r_{\hat{X}}(\tau)$ där $r_{\hat{X}}(0) = \sigma_1^2(1+c_1^2)$, $r_{\hat{X}}(\pm1) = \sigma_1^2 c_1$ och $r_{\hat{X}}(\tau)=0$ för övrigt – här är σ_1^2 variansen för bruset $e(t)$ och σ_2^2 variansen för bruset $\hat{e}(t)$.

`c` Man kan anpassa en MA(1)-process $Z(t) = \sum_{k=0}^{1}(c_{\mathrm{ny}})_1 e_{\mathrm{ny}}(t-k)$ där det vita bruset $\{e_{\mathrm{ny}}(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ har varians σ_{ny}^2, genom att lösa ekvationerna $r_Z(0) = \sigma_{\mathrm{ny}}^2(1+(c_{\mathrm{ny}})_1^2) = r_Y(0) = \sigma_1^2(1+c_1^2)+\sigma_2^2$ och $r_Z(\pm1) = \sigma_{\mathrm{ny}}^2(c_{\mathrm{ny}})_1 = r_Y(\pm1) = \sigma_1^2 c_1$ – detta är vad den bifogade `Mathematica`-koden gör.

`Uppgift 4` `a` Eftersom $\mathbf{Var}\{f(t)\} = 0$ då $f(t)$ ej beror av slumpen ω, så kan $f(t)$ ej vara vitt brus, ty det senare har varians $\sigma^2>0$.

`b` Eftersom $\mathbf{E}\{\xi_k\}=0$ medan $\mathbf{E}\{\eta_k\}=\frac{1}{2}$ så är processen ej svagt stationär.

$\boxed{\texttt{c}}$ Eftersom väntevärdet av $\hat{e}(t)$ beror av t, så kan olika $\hat{e}(t)$ ej vara likafördelade, och $\{\hat{e}(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ därför ej svagt stationär.

är den inte heller så har speciellt olika processvärden samma fördelning. Då det senare ej är fallet måste $\hat{e}(t)$ vara icke-stationär.

$\boxed{\texttt{d}}$ Processen $e(t)=X(t)$ för $t\in\mathbb{Z}$ är diskret vitt brus, eftersom $m_e(t) = m_X(t) = 0$ och $r_e(\tau) = r_X(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$ (Kroneckers δ) för $\tau \in \mathbb{Z}$. Här utnyttjades att $r_X(\tau)=0$ för $\tau\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ eftersom $\sin(2\pi\tau)=0$ för $\tau\in\mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Vi har $m_e(t) = \mathbf{E}\{e(t)\} = \mathbf{E}\{\mathrm{sign}(N_t)\xi\} = \mathbf{E}\{\mathrm{sign}(N_t)\}\,\mathbf{E}\{\xi\} = 0\cdot 0 = 0$, så att $\mathbf{Var}\{e(t)\} = \mathbf{E}\{e(t)^2\} = \mathbf{E}\{\xi^2\} = \sigma^2$ och $\mathbf{Cov}\{e(s),e(t)\} = \mathbf{E}\{e(s)e(t)\} = \mathbf{E}\{\mathrm{sign}(N_s)\mathrm{sign}(N_t)\xi^2\} = \mathbf{E}\{\mathrm{sign}(N_s)\}\,\mathbf{E}\{\mathrm{sign}(N_t)\}\,\mathbf{E}\{\xi^2\} = 0\cdot 0\cdot\sigma^2 = 0$ för $s\neq t$.

$\boxed{\texttt{b}}$ Nej – om t.ex. "amplituden" $|\mathrm{sign}(N_t)\xi| = |\xi|$ för ett brusvärde $e(t)$ är stor, dvs. nära 1, så kommer alla andra brusvärden också att ha stor amplitud (som dessutom är precis lika stor). Alltså är olika brusvärden ej oberoende.

$\boxed{\texttt{c}}$ Utsignalen $Y(t)$ är en MA(1)-process med $c_1 = 1$, så att $m_Y(t) = 0$ samt $r_Y(0) = \sigma^2(1+c_1^2)$ och $r_Y(\pm 1) = \sigma^2 c_1$ medan $r_Y(\tau)=0$ för övrigt.

$\boxed{\texttt{d}}$ $Y(t) = e(t)+e(t-1) = [\mathrm{sign}(N_t)+\mathrm{sign}(N_{t-1})]\xi$ som är likformigt fördelad över intervallet $[-2,2]$ med sannolikhet $\frac{1}{2}$ och noll med sannolikhet $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 1)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Gör som i programeringsuppgift 1 c, förutom att kontrollen av om $\max_{t\in[0,10]} X(t) \geq 3$ i varje "varv" av simuleringen byts ut mot en registrering av $\max_{t\in[0,10]} X(t)$. Sedan skattas $\mathbf{E}\{\max_{t\in[0,10]} X(t)\}$ med medelvärdet för de registrerade värdena.

$\boxed{\texttt{b}}$ Plotta successiva differenskvoter för processen $X(t)$ och avgör genom inspektion av plottarna hur många derivator som existerar (=första gången det ballar ur-1). Eller så plotta successiva differenskvoter för kovariansfunktionen $r_X(\tau)$ och avgör genom inspektion av plottarna hur många derivator som existerar (=första gången det ballar ur-1) – sedan är processen hälften så många gånger deriverbar, avrundat nedåt till närmsta heltal. Dessa metoder kräver att man kan simulera numeriska värden för processen, resp. beräkna numeriska värden för kovariansfunktionen, åtminstone approximativt.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 2)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Ett sådant vitt brus existerar inte, ty kovariansfunktionen är inte ens en funktion. Om man låter bandbredden för bandbegränsat vitt brus gå mot oändligheten, så fås i gränsen en spektraltäthet som är lika med en och samma positiva konstant, säg $r_0>0$, för alla frekvenser. Denna spektraltäthet är också spektraltätheten för $X(t)$. Man kan alltså realisera $X(t)$ approximativt som bandbegränsat vitt brus med mycket stor bandbredd.

$\boxed{\texttt{b}}$ Enligt filterteori är $r_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)r_X(\tau+u-v)\,dvdu = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)(\int_{-\infty}^{\infty} h(v)\,r_0\delta(\tau+u-v)\,dv)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(\tau+u)\,r_0\,du$ och $\mathbf{Var}\{Y(t)\} = r_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)^2 r_0\,du$, medan $r_{X,Y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)r_X(\tau-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,r_0\delta(\tau-u)\,du = r_0 h(\tau)$.