Tentamen i stokastiska processer för I den 19/12 - 03 kl. 8^{45}-13^{45}

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
LÄRARE: Patrik Albin.
Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Det meddelas via `email`-listan då tentamensresultatet föreligger, och var det anslås. Lösningar till tentamen läggs ut på kurshemsidan under fredag em.

Tentamina granskas, och ev. frågor eller klagomål på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning, på därför speciellt avsett formulär, som finns i hängande på väggen i det lilla rummet mittemot mottagningen. Lämna ifyllt formulär där, så tar första lärare som kommer hand om det.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda (men ej överdrivet) fullständigt.

Uppgift 1 **a** I Black-Scholes modell för säg ett optionspris $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, är $S(t) = \exp\{W(t)-\frac{1}{2}t\}$ där $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en standard Wienerprocess. Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{S(t)>1\}$. **(1 poäng)**

b Förklara hur man utgående från faktumet att $W(t)-\frac{1}{2}t$ är $\mathrm{N}(-\frac{1}{2}t,t)$-fördelad, mha. grundläggande formler från kapitel 0 i min bok visa att $\mathbf{E}\{S(t)\} = 1$ (dvs. konstant) för $t\geq 0$, för Black-Scholes modellen i uppgift 1 a. Detta är en grundläggande rättviseprincip för modellen ("no free lunches"). **(1 poäng)**

c Beräkna $\mathbf{Var}\{X(1)+X(2)\}$ för en Poissonprocess med intensitet λ. **(1 poäng)**

d Definiera processen $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ genom $X(t) = W(t+1)-W(t)$ där $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är Wienerprocessen. Visa att $X(t)$ är stationär genom kontrollera att $\mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\}$ endast beror av τ för $\tau \geq 0$ (man behöver inte kontrollera $\tau < 0$ också). Det kan vara lämpligt att dela upp beräkningen på fallen $\tau > 1$ och $\tau \leq 1$. **(2 poäng)**

Uppgift 2 En tidsdiskret svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är insignal till ett filter med impulssvar $h_1(k)$ och utsignal $\{Y_1(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$. Processen $Y_1(t)$ är insignal till ett filter med impulssvar $h_2(\ell)$ och utsignal $\{Y_2(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$. Processen $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ definieras genom $Z(t) = Y_1(t)+Y_2(t)$.

$$Y_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)X(t-k), \quad Y_2(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_2(\ell)Y_1(t-\ell), \quad Z(t) = Y_1(t)+Y_2(t).$$

$$X(t) \rightarrow \boxed{\text{impulssvar } h_1(k)} \rightarrow Y_1(t) \rightarrow \boxed{\text{impulssvar } h_2(\ell)} \rightarrow Y_2(t)$$

a Visa att korskovariansfunktionen $r_{Y_1,Z}(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y_1(t), Z(t+\tau)\}$ ges av

$$r_{Y_1,Z}(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(j)h_1(k)r_X(\tau+j-k) + \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_2(\ell)h_1(j)h_1(k)r_X(\tau+j-k-\ell).$$ **(2.5 poäng)**

b Föklara formeln (med självklara beteckningar)

$$r_{Y_1,Z}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} |H_1(f)|^2[1+H_2(f)]\mathcal{P}_X(f)\,df.$$ **(2.5 poäng)**

Uppgift 3 I en mycket enkel modell för prediktion av aktiepriser, som antages svagt stationära, önskar man anpassa en AR(2)-processmodell $e(t) = \sum_{k=0}^{2} a_k X(t-k)$, $t\in\mathbb{Z}$, till ett observerat datamaterial $\{X(k)\}_{k=1}^{n}$. Här är $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ diskret vitt brus med varians σ^2. Paramatrarna a_2 och σ^2 är ej kända utan skall anpassas till data, medan $a_0 = a_1 = 1$ är kända.

`a` Förklara hur den anpassade processmodellen kan användas för att, givet aktiepriserna $X(t)$ idag och $X(t-1)$ igår prediktera aktiepriset $X(t+1)$ imorgon. Hur stort blir felet i en sådan prediktion, förutsatt att modellen stämmer? **(1.5 poäng)**

`b` Beskriv hur AR(2)-modellen kan anpassas till datamaterialet. **(2 poäng)**

`c` AR(2)-processen har väntevärde noll, vilket ej är realistiskt för det aktuella datamaterialet. Föreslå en enkel generalisering till en processmodell $\{\hat{X}(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ som tillåter $m_{\hat{X}} \neq 0$. Ange hur den nya modellen kan anpassas till data. **(1.5 poäng)**

`Uppgift 4` I samtida finansmatematik utnyttjats ofta en Ornstein-Uhlenbeck process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ till att modellera volatilitet för t.ex. aktiepriser (eller log-aktiepriser).

Alexander är intresserad av den uppfattning en aktör på marknaden har om volatiliteten $X(t)$. Eftersom processen $X(t)$ är hemlig för utomstående är den ej observerbar för Alexander. Men genom studera aktörens handel kan Alexander bestämma $X(t)+S(t)$ där $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är en oberoende svagt stationär brusstörning med väntevärde noll, modellerande osäkerheten i Alexanders bestämning av $X(t)$. En rimlig ansats, som är mer eller mindre verifierbar, är att $S(t)$ är bandbegränsat vitt brus.

`a` Alexanders approximation $X(t)+S(t)$ av $X(t)$ kan förbättras genom att filtrera $X(t)+S(t)$. Ange frekvensfunktionen $H(f)$ för det filter som minimerar $\mathbf{E}\{[Y(t)-X(t)]^2\}$, där $Y(t)$ är utsignalen från filtret. **(3 poäng)**

`b` Ange ett uttryck för $\mathbf{E}\{[Y(t)–X(t)]^2\}$, giltigt för vilket som helst val av frekvensfunktion $H(f)$ i uppgift 4 a (dvs. inte bara det optimala valet). **(2 poäng)**

`Uppgift 5` `a` En stokastisk process är som bekant en funktion $X(\omega,t)$, av utfallet av ett slumpförsök ω och av tiden t, så att processvärden är både stokastiska och tidsberoende. Speciellt är en vanlig deterministisk funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en ("icke-stokastisk") stokastisk process $X(\omega,t)=f(t)$, $t\in\mathbb{R}$, utan ω-beroende, i kontinuerlig tid. Utred vilka vanliga funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som är stationära. **(1 poäng)**

`b` Utred vilka vanliga funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som är svagt stationära. **(1 poäng)**

`c` Kan en Lévy process vara svagt stationär? **(1 poäng)**

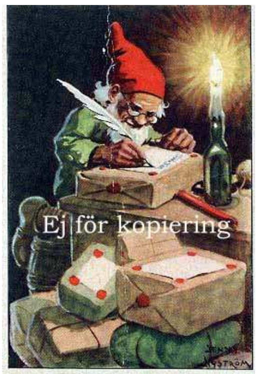
`d` Visa att en Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med väntevärdesfunktion $m_X(t)=0$ och kovariansfunktion $r_X(s,t) = |s|^\alpha + |t|^\alpha + |t-s|^\alpha$ är självsimilär. **(2 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 1)` `a` Föklara hur man mha. smärre modifieringar av hagelbrusets definition kan skapa en Poissonprocess. **(2 poäng)**

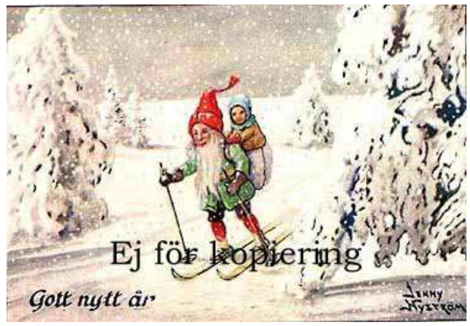
`b` Visa mha. någon slags programkod, hur man mha. simulering kan skatta sannolikheten att $\mathbf{P}\{\max_{t\in[0,10]} X(t) \geq 3\}$ för den Gaussiska processen $X(t)$ i programeringsuppgift 2. **(3 poäng)**

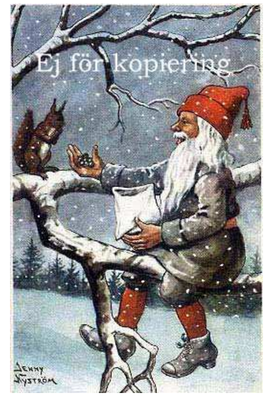
`Uppgift 6 (projekt 2)` `a` Redogör i detalj för beräkning av bitfelssannolikheten P_b. Inkludera en detaljerad beräkning av variansen för det filtrerade bruset $N(m)$ utgående från det ofiltrerade brusets givna kovariansfunktion $r_W(\tau)$. **(2.5 poäng)**

`b` Förklara hur man mha. en "inspelning" av 10 000 verkliga brusobservationer lagrade i en datafil, vektor eller liknande, kan skatta bitfelssannolikheten för ett verkligt digitalt kommuniklationssystem. Säg också något om de grundläggande modellantagande som behövs för att skattningen skall fungera (obereonde, stationaritet, likafördelade, etc.). **(2.5 poäng)**



Lycka till!





Lösningar till tentamen i stokastiska processer för I den 19/12

`Uppgift 1` `a` Eftersom $W(t)$ är $\mathrm{N}(0,t)$-fördelad, så är $\mathbf{P}\{S(t)>1\} = \mathbf{P}\{\log[S(t)]>0\} = \mathbf{P}\{W(t)>\frac{1}{2}t\} = 1-\Phi(\frac{0-(-t/2)}{\sqrt{t}}) = 1-\Phi(\frac{1}{2}\sqrt{t})$.

`b` $\mathbf{E}\{S(t)\} = \mathbf{E}\{\exp[W(t)-\frac{1}{2}t]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x-t/2} f_{W(t)}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x-t/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,t}} \mathrm{e}^{-x^2/(2t)}\,dx = \mathrm{e}^{-t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,t}} \mathrm{e}^{-(x-t)^2/(2t)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{N}(t,t)}(x)\,dx = 1$.

`c` Beräkna $\mathbf{Var}\{X(1)+X(2)\} = r_X(1,1)+2r_X(1,2)+r_X(2,2) = V_X(1)\,[\min\{1,2\} +2\min\{1,2\}+\min\{2,2\}] = \lambda\,[1+2\cdot 1+2] = 5\,\lambda$.

`d` För $\tau \leq 1$ är $\mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{W(t+1)-W(t), W(t+1+\tau)-W(t+\tau)\} = r_W(t+1,t+1+\tau) - r_W(t+1,t+\tau) - r_W(t,t+1+\tau) + r_W(t,t+\tau) = \min\{t+1,t+1+\tau\} - \min\{t+1,t+\tau\} - \min\{t,t+1+\tau\} + \min\{t,t+\tau\} = (t+1)-(t+\tau)-t+t = 1-\tau$, medan kovariansen är noll för $\tau>1$ eftersom ökningarna är oberoende. Alltså beror kovariansen ej av t, så att $X(t)$ är svagt stationär eftersom uppenbart $m_X(t)=0$.

`Uppgift 2` `a` Vi har $r_{Y_1,Z}(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y_1(t), Y_1(t+\tau)+Y_2(t+\tau)\} = r_{Y_1}(\tau) + r_{Y_1,Y_2}(\tau)$, där enligt filterteori $r_{Y_1}(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(j)h_1(k)r_X(\tau+j-k)$ och $r_{Y_1,Y_2}(\tau) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_2(\ell)r_{Y_1}(\tau-\ell) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2(\ell)h_1(j)h_1(k)r_X(\tau+j-k-\ell)$.

`b` Eftersom $r_{Y_1,Z}(\tau) = r_{Y_1}(\tau)+r_{Y_1,Y_2}(\tau)$ är $\mathcal{P}_{Y_1,Z}(f) = \mathcal{P}_{Y_1}(f)+\mathcal{P}_{Y_1,Y_2}(\tau)$, där enligt filterteori $\mathcal{P}_{Y_1}(f) = |H_1(f)|^2\mathcal{P}_X(f)$ och $\mathcal{P}_{Y_1,Y_2}(f) = H_2(f)\mathcal{P}_{Y_1}(f) = H_2(f)|H_1(f)|^2\mathcal{P}_X(f)$. Det följer att $r_{Y_1,Z}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi\tau f}\mathcal{P}_{Y_1,Z}(f)\,df\,|_{\tau=0} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi\tau f}|H_1(f)|^2 [1+H_2(f)]\mathcal{P}_X(f)\,df\,|_{\tau=0} = \int_{-1/2}^{1/2} |H_1(f)|^2[1+H_2(f)]\mathcal{P}_X(f)\,df$.

`Uppgift 3` `a` Eftersom sambandet $e(t) = \sum_{k=0}^{2} a_k X(t-k)$ medför att $X(t+1) = e(t+1) - X(t) - a_2X(t-1)$, så predikteras $X(t+1)$ med $-X(t)-a_2X(t-1)$ (ty bruset ”rår man ej över”).

`b` Utnyttja datamaterialet till att beräkna skattningar $r_X^\star(0)$, $r_X^\star(\pm1)$ och $r_X^\star(\pm2)$ av $r_X(0)$, $r_X(\pm1)$ och $r_X(\pm2)$. Sätt sedan in de erhållna skattningarna i de två första Yule-Walker ekvationerna

$$r_X(1)+a_1r_X(0)+a_2r_X(\pm1) = 0 \qquad \text{och} \qquad r_X(0)+a_1r_X(1)+a_2r_X(2) = \sigma^2,$$

och lös det erhållna ekvationssystemet

$$r_X^\star(1)+a_1r_X^\star(0)+a_2r_X^\star(\pm1) = 0 \qquad \text{och} \qquad r_X(^\star0)+a_1r_X^\star(1)+a_2r_X^\star(2) = \sigma^2,$$

efter de obekanta parametrarna a_2 och σ^2.

`c` Sätt $\hat{X}(t) = X(t)+\mu$ för en konstant $\mu\in\mathbb{R}$ så att $m_{\hat{X}} = \mu$, och skatta (”anpassa”) sedan μ som medelvärdet av observationerna i datamaterialet.

`Uppgift 4` `a` Enligt teori för Wienerfilter har, med självklara beteckningar, det bästa filtret frekvensfunktion $H(f) = \mathcal{P}_X(f)/[\mathcal{P}_X(f)+\mathcal{P}_S(f)]$. Här sätter man sedan in de $\mathcal{P}_X(f)$ och $\mathcal{P}_S(f)$ som gäller för OU-processen resp. bandbegränsat vitt brus.

`b` Med en självklar anpasning av beteckningarna så ges ett sådant uttryck på sid 118 i Patrik Albins kursbok.

`Uppgift 5` `a` Om $X(t)=f(t)$ är stationär så är den svagt stationär, vilket enligt lösning till uppgift 5 b fordrar att $f(t)$ är konstant. I det fallet är å andra sidan $X(t)=f(t)$ uppenbart stationär. Alltså är $X(t)=f(t)$ är stationär omm. $f(t)$ är konstant.

`b` Eftersom $r_X(t,t+\tau)=0$ ej beror av t $X(t)=f(t)$, så är $X(t)=f(t)$ svagt stationära omm. $m_X(t)=\mathbf{E}\{X(t)\}=f(t)$ ej beror av t, dvs. omm. $f(t)$ är konstant.

`c` En Lévyprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ har vvf. $m_X(t)=m_X(1)\,t$ och kvf. $r_X(t,t+\tau)=V_X(1)\min\{t,t+\tau\}$, som är oberoende av t omm. $m_X(1)=V_X(1)=0$. Alltså är Lévyprocessen svagt stationär då och endast då, vilket betyder att den är svagt stationär omm. $X(t)=0$.

`d` Eftersom $X(t)$ är Gaussisk rcker det visa att $m_Y(t)=m_Z(t)$ och $r_Y(s,t)=r_Z(s,t)$ för processerna $Y(t)=\lambda^\kappa X(t)$ och $Z(t)=X(\lambda t)$, för varje val av $\lambda>0$, för något självsimilaritetsindex $\kappa>0$. Här är det uppenbart att $m_Y(t)=0=m_Z(t)$, medan $r_Y(s,t)=\mathbf{Cov}\{\lambda^\kappa X(s),\lambda^\kappa X(t)\}=\lambda^{2\kappa}[|s|^\alpha+|t|^\alpha+|t-s|^\alpha]$ och $r_Z(s,t)=\lambda^\alpha[|s|^\alpha+|t|^\alpha+|t-s|^\alpha]$. Mao. gäller självsimilaritet med $\kappa=\alpha/2$.

`Uppgift 6 (projekt 1)` `a` En Poissonprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet λ erhålles som $X(t)=\sum_{k=1}^{\infty} g(t-\sum_{j=1}^{k}\xi_j)$, där $\xi_1,\xi_2,\ldots$ är oberoende $\exp(\lambda)$-fördelade och $g(t)$ är enhetssteget $g(t)=1$ för $t\geq 0$ och $g(t)=0$ för $t<0$.

`b` För ett 0.02 brett konfidensintervall för den sökta sannolikheten, kan man simulera $n\approx 10000$ upprepningar som i programeringsuppgift 1.c, men där hagelbruset byts ut mot en Gaussisk process generad enligt programeringsuppgift 2.c, och sedan ζ_i sättes till 1 om $\max_{t\in[0,10]} X(t)\geq 3$ och 0 annars, som i programeringsuppgift 1.c.

`Uppgift 6 (projekt 2)` `a` Detta är en del av projektet ”rätt upp och ner”, och skall därför ha utförts där.

`b` Addera bruset till signalen – som i projketet, avkoda – som i projketet, och skatta bitfelssannolikheten – som i projketet. De grundläggande modellantagandena är att det inspelade bruset är observationer av en sekvens oberoende och likafördelade stokastiska variabler [som var $\mathrm{N}(0,N_0/2)$-fördelade i projektet], samt ev. även att bruset är oberoende av signalen.