Tentamen i stokastiska processer den 14/4 - 04 kl. 8^{45}-13^{45}

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
LÄRARE: Patrik Albin 772 3512.
Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Tentamensresultatet anslås i MV-husets källare, samt meddelas via email till dem som tydligt skriver sin email-adress på tentamensomslaget. Lösningar till tentamen läggs ut på kurshemsidan så snart som möjligt efter tentamens slut.

Tentamina granskas, och ev. frågor eller klagomål på rättning lämnas, vid MD-husets mottagning, på därför speciellt avsett formulär, som finns i hängande på väggen i det lilla rummet mittemot mottagningen. Lämna ifyllt formulär där, så tar första lärare som kommer hand om det.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda men ej överdrivet fullständigt.

Uppgift 1 **a** För väntevärdesfunktionen $m_X(t)$ för en Poissonprocess $X(t)$ gäller att $m_X(1)=2$. Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{X(2)-X(1)=1\}$. **(1 poäng)**

b För kovariansfunktionen $r_W(s,t)$ för en Wienerprocess $W(t)$ gäller att $r_W(1,2) = \mathbf{Cov}\{W(1),W(2)\} = 1$. Bestäm sannolikheten $\mathbf{P}\{W(2)-W(1)>1\}$. **(1 poäng)**

c Ange utan räkningar värden på sannolikheten $\mathbf{P}\{X(2)-X(1)=-1\}$ för en Poissonprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, samt sannolikheterna $\mathbf{P}\{W(2)-W(1)=1\}$ och $\mathbf{P}\{W(2)-W(1)>0\}$ för en Wienerprocess $\{W(t)\}_{t\geq 0}$. **(1 poäng)**

d Förklara varför korskovariansfunktionen $r_{X,Y}(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s),Y(t)\}$ mellan två stokastiska processer $X(t)$ och $Y(t)$ ej nödvändigtvis är symmetrisk, dvs. ej nödvändigtvis uppfyller $r_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(t,s)$. **(1 poäng)**

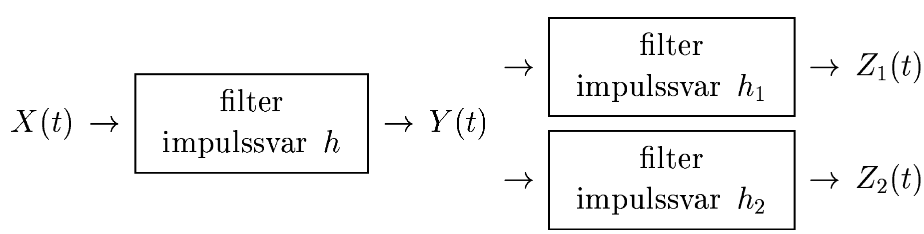
e Avgör huruvida korskorrelationsfunktionen

$$\rho_{X,Y}(s,t) = \frac{\mathbf{Cov}\{X(s),Y(t)\}}{\sqrt{\mathbf{Var}\{X(s)\}\,\mathbf{Var}\{Y(t)\}}}$$

mellan två stationärt korrelerade svagt stationära stokastiska processer $X(t)$ och $Y(t)$ är symmetrisk, dvs. om det alltid gäller att $\rho_{X,Y}(s,t) = \rho_{X,Y}(t,s)$. **(1 poäng)**

Uppgift 2 En svagt stationär stokastisk process $X(t)$ med väntevärde m_X och kovariansfunktion $r_X(t)$ är insignal till ett filter med impulssvar $h(t)$ och utsignal $Y(t)$. Processen $Y(t)$ i sin tur är insignal till två filter, med impulssvar $h_1(t)$ respektive $h_2(t)$, och med utsignaler $Z_1(t)$ respektive $Z_2(t)$.

$$Z_1(t) = (h_1 \star Y)(t) = (h_1 \star h \star X)(t) \qquad \text{och} \qquad Z_2(t) = (h_2 \star Y)(t) = (h_2 \star h \star X)(t)$$



a Uttryck väntevärdet m_{Z_1}, kovariansfunktionen $r_{Z_1}(t)$ och korskovariansfunktionen $r_{Z_1,Z_2}(t)$ med hjälp av de givna storheterna m_X, r_X, h, h_1 och h_2, i såväl kontinuerlig som diskret tid. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Bevisa att, med uppenbara beteckningar, korsspektraltätheten $\mathcal{P}_{Z_1,Z_2}$ ges av

$$\mathcal{P}_{Z_1,Z_2}(f) = |H(f)|^2\overline{H}_1(f)H_2(f)\mathcal{P}_X(f). \qquad \textbf{(2.5 poäng)}$$

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ Låt $r(0)=a$, $r(1)=b$, $r(-1)=c$ och $r(k)=0$ för övrigt. För vilka val av talen $a,b,c\in\mathbb{R}$ är funktionen $r:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ en kovariansfunktion? **(5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ Visa att en självsimilär process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med stationära ökningar är kontinuerlig om och endast om $\mathbf{E}\{X(1)^2\}<\infty$. **(5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ Låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Wiener process. Visa att processen $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ given av $X(t) = tW(t^{-1})$ för $t>0$ och $X(0)=0$ är en Wienerprocess. **(5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 1)}}$ $\boxed{\text{a}}$ Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poissonprocess med intensitet 1. Visa med någon slags programkod hur man med simulering kan skatta sannolikheten $\mathbf{P}\{X(t)>t$ för något $t\in[0,10]\}$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Låt $\xi_1,\ldots,\xi_n$ vara oberoende s.v. likformigt fördelade över $[0,1]$ och $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ en integrerbar funktion. Förklara varför $\int_0^1 g(x)\,dx$ kan skattas med $\sum_{i=1}^n g(\xi_i)/n$. Varför är denna skattning bra jämfört med konventionella numeriska metoder för att beräkna integraler då g är irregulär (t.ex. ej deriverbar). **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 2)}}$ $\boxed{\text{a}}$ Det filter som utnyttjas i projketet är ett så kallat signalanpassat filter, dvs. ett filter vars utsignal är den bästa möjliga för att avgöra vad som sänts. Försök relatera filtret i projektet till teorin för signalanpassade filter i kursen, och förklara hur de hänger ihop. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Diskutera några modifieringar som behöver göras av räkningarna i projektet om bruset $W(t)$ har en "verklig" kovariansfuktion $r_W(t)$, som tar värden skilda från noll även i andra punkter än nollan, t.ex. $r_W(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Lycka till!}}$

$\boxed{\texttt{Uppgift 1}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ För en Poissonprocess med intensitet λ är $X(1) \sim \mathrm{Po}(\lambda \cdot 1) = \mathrm{Po}(\lambda)$, så att $m_X(1) = \mathbf{E}\{X(1)\} = \mathbf{E}\{\mathrm{Po}(\lambda)\} = \lambda$. Alltså är $\lambda = 2$, så att $\mathbf{P}\{X(2) - X(1) = 1\} =_{\text{stationära ökningar}} \mathbf{P}\{X(1) - X(0) = 1\} =_{X(0)=0} \mathbf{P}\{X(1) = 1\} = \mathbf{P}\{\mathrm{Po}(\lambda) = 1\} = \mathbf{P}\{\mathrm{Po}(2) = 1\} = 2\mathrm{e}^{-2}$.

$\boxed{\texttt{b}}$ Alternativ 1. För en Wienerprocess är $r_W(1,2) = \sigma^2 \min\{1,2\} = \sigma^2$. Alltså är $\sigma^2 = 1$, så att $\mathbf{P}\{W(2) - W(1) > 1\} =_{\text{stationära ökningar}} \mathbf{P}\{W(1) - W(0) > 1\} =_{W(0)=0} \mathbf{P}\{W(1) > 1\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(\mathbf{E}\{W(1)\}, \mathbf{Var}\{W(1)\}) > 1\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(0, \sigma^2 \min\{1,1\}) > 1\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(0,1) > 1\} = 1 - \mathbf{P}\{\mathrm{N}(0,1) \leq 1\} = 1 - \Phi(1)$.

Alternativ 2. Som i alternativ 1 fås att $\sigma^2 = 1$. Eftersom $W(t)$ är en Gaussisk process är $W(2) - W(1)$ $\mathrm{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$-fördelad, där $\hat{\mu} = \mathbf{E}\{W(2) - W(1)\} = \mathbf{E}\{W(2)\} - \mathbf{E}\{W(1)\} = m_W(2) - m_W(1) = 0 - 0 = 0$ och $\hat{\sigma}^2 = \mathbf{Var}\{W(2) - W(1)\} = \mathbf{Var}\{W(2)\} - 2\,\mathbf{Cov}\{W(2), W(1)\} + \mathbf{Var}\{W(1)\} = r_W(2,2) - 2\,r_W(2,1) + r_W(1,1) = \sigma^2 \min\{2,2\} - 2\sigma^2 \min\{2,1\} + \sigma^2 \min\{1,1\} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, så att $\mathbf{P}\{W(2) - W(1) > 1\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(0,1) > 1\} = 1 - \Phi(1)$.

$\boxed{\texttt{c}}$ Eftersom $X(t)$ är växande är $\mathbf{P}\{X(2) - X(1) = -1\} = 0$. Eftersom $W(2) - W(1)$ har en kontinuerlig och symmetrisk (normal-) fördelning, så är $\mathbf{P}\{W(2) - W(1) = 1\} = 0$ och $\mathbf{P}\{W(2) - W(1) > 0\} = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\texttt{d}}$ Alternativ 1. För en svagt stationär process $X(t)$ med derivata $X'(t)$ är enligt sats 3.6 $r_{X,X'}(t, t+\tau) = r_X'(\tau) = -r_X'(-\tau) = -r_{X,X'}(t, t-\tau) =_{\text{stationärt korrelerade}} = -r_{X,X'}(t+\tau, t)$, dvs. vi har antisymmetri i.st.f. symmetri.

Alternativ 2. Det är fullt möjligt att t.ex. $Y(s) = X(t)$ medan $Y(t)$ är okorrelerad med $X(s)$, vilket ger $r_{X,Y}(t,s) = \mathbf{Cov}\{X(t), Y(s)\} = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t)\} = \mathbf{Var}\{X(t), X(t)\} > 0 = \mathbf{Cov}\{X(s), Y(t)\} = r_{X,Y}(s,t)$, dvs. ej symmetri.

$\boxed{\texttt{e}}$ Alternativ 1. För $X(t)$ svagt stationär med derivata $X'(t)$ är enligt första lösningen till uppgift 1 d $\rho_{X,X'}(t, t+\tau) = r_{X,X'}(t, t+\tau) / \sqrt{r_X(0)\, r_{X'}(0)} = -r_{X,X'}(t+\tau, t) / \sqrt{r_X(0)\, r_{X'}(0)} = -\rho_{X,X'}(t+\tau, t)$, dvs. antisymmetri i.st.f. symmetri.
Alternativ 2. Då $X(t)$ och $Y(t)$ är svagt stationära är $\rho_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(s,t) / \sqrt{r_X(0) r_Y(0)}$, så att $\rho_{X,Y}(s,t)$ är symmetrisk om och endast om $r_{X,Y}(s,t)$ är symmetrisk. Det senare är ej sant i allmänhet enligt lösningen till uppgift 1 d.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Alternativ 1. För kontinuerlig tid är enligt sats 7.3 $m_{Z_1} = m_Y(\int_{-\infty}^{\infty} h_1(s)\,ds) = m_X(\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,ds)(\int_{-\infty}^{\infty} h_1(s)\,ds)$, $r_{Z_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u) h_1(v) r_Y(\tau + u - v)\,dudv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_1(v)h(x)h(y) r_Y(\tau + u - v + x - y)\,dudvdxdy$, medan $r_{Z_1,Z_2}(\tau) = \mathbf{Cov}\{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u) Y(t-u)\,du, \int_{-\infty}^{\infty} h_2(v) Y(t+\tau-v)\,dv\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(v) r_Y(\tau+u-v)\,dudv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(v)h(x)h(y) r_X(\tau+u-v+x-y)\,dudvdxdy$. Byt ut integralerna mot summor i diskret tid.

Alternativ 2. För kontinuerlig tid är $m_{Z_1} = \mathbf{E}\{(h_1 \star h \star X)(t)\} = \mathbf{E}\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u) h(v) X(t-u-v)\,dudv\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h(v)\,\mathbf{E}\{X(t)\}\,dudv = (\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\,du)(\int_{-\infty}^{\infty} h(v)\,dv) m_X$, $r_{Z_1}(\tau) = \mathbf{Cov}\{(h_1 \star h \star X)(t), (h_1 \star h \star X)(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h(x) X(t-u-x)\,dudx, \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)h(y) X(t+\tau-v-y)\,dvdy\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h(x) h_1(v)h(y)\,\mathbf{Cov}\{X(t-u-x), X(t+\tau-v-y)\}\,dudxdvdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h(x)h_1(v) h(y) r_X(\tau + u - v + x - y)\}\,dudxdvdy$ och $r_{Z_1,Z_2}(\tau) = \mathbf{Cov}\{(h_1 \star h \star X)(t), (h_2 \star h \star X$

$)(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h(x)X(t-u-x)\,dudx, \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(v)h(y)X(t+\tau-v-y)\,dvdy\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h(x)h_2(v)h(y)\,\mathbf{Cov}\{X(t-u-x), X(t+\tau-v-y)\}\,dudxdvdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h(x)h_2(v)h(y)r_X(\tau+u-v=x-y)\}\,dudxdv\,dy$. Byt ut integralerna mot summor i diskret tid.

$\boxed{\text{b}}$ Alternativ 1. I kontinuerlig tid är enligt lösningen till uppgift 2 a $\mathcal{P}_{Z_1,Z_2}(f) = (\mathfrak{F}^{-1}r_{Z_1,Z_2})(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi\tau f}h_1(u)h_2(v)h(x)h(y)r_X(\tau+u-v+x-y)\,dudvdxdyd\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i2\pi uf}h_1(u)\,\mathrm{e}^{-i2\pi vf}h_2(v)\,\mathrm{e}^{i2\pi xf}h(x)\,\mathrm{e}^{-i2\pi yf}h(y)\mathrm{e}^{-i2\pi(\tau+u-v+x-y)f}r_X(\tau+u-v+x-y)\,dudvdxdyd\tau =_{\hat{\tau}=\tau+u-v+x-y}= (\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi uf}h_1(u)\,du)(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi vf}h_2(v)\,dv)(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi xf}h(x)\,dx)(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi yf}h(y)\,dy)(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi\hat{\tau}f}r_X(\hat{\tau})\,d\hat{\tau}) = \overline{H}_1(f)H_2(f)\overline{H}(f)H(f)\mathcal{P}_X(f)$. Byt ut integralerna mot summor i diskret tid.

Alternativ 2. Enligt lösningen till uppgift 2 a är $r_{Z_1,Z_2}(\tau) = (h_1(-\cdot)\star h_2\star h(-\cdot)\star h\star r_X)(\tau)$, så att, enligt räkneregler för Fouriertransformer, $\mathcal{P}_{Z_1,Z_2}(f) = (\mathfrak{F}^{-1}r_{Z_1,Z_2})(f) = (\mathfrak{F}^{-1}h_1(-\cdot))(f)(\mathfrak{F}^{-1}h_2)(f)(\mathfrak{F}^{-1}h(-\cdot))(f)(\mathfrak{F}^{-1}h)(f)(\mathfrak{F}^{-1}r_X)(f) = \overline{H}_1(f)H_2(f)\overline{H}(f)H(f)\mathcal{P}_X(f)$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ En summerbar funktion $r:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ är en kovariansfunktion om inversa Fouriertransform $\mathcal{P}(f) = (\mathfrak{F}^{-1}r)(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi fk}r(k)$ är en spektraltäthet, dvs. om $\mathcal{P}(f)$ är icke-negativ och symmetrisk (samt integrerbar över $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$).

I vårt fall är $\mathcal{P}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi fk}r(k) = a+b\mathrm{e}^{-i2\pi f}+c\mathrm{e}^{i2\pi f} = a+\frac{1}{2}(c+b)(\mathrm{e}^{i2\pi f}+\mathrm{e}^{-i2\pi f})+\frac{1}{2}(c-b)(\mathrm{e}^{i2\pi f}-\mathrm{e}^{-i2\pi f}) = a+(c+b)\cos(2\pi f)+(c-b)\,i\sin(2\pi f)$.

Symmetri för $\mathcal{P}(f)$ innebär att $b=c$. varvid $\mathcal{P}(f) = a+2b\cos(2\pi f)$ är icke-negativ då $|2b|\leq a$. Alltså är $r(k)$ en kovariansfunktion då $b=c$ och $|2b|\leq a$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ Kontinuitet för $X(t)$ i $t=t_0$ innebär att $\mathbf{E}\{[X(t)-X(t_0)]^2\} =_{\text{stationära ökningar}} \mathbf{E}\{X(t-t_0)^2\} =_{\text{självsimilaritet}} \mathbf{E}\{|t-t_0|^{2H}X(1)^2\} \to 0$ då $t\to t_0$, vilket är uppfyllt om och endast om $\mathbf{E}\{X(1)^2\}<\infty$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ Eftersom det är klart att $X(t)$ är en Gaussisk process räcker det visa att $X(t)$ har väntevärdesfunktion $m_X(t)=0$ och kovariansfunktion $r_X(s,t) = \sigma^2\min\{s,t\}$. Detta gäller eftersom $m_X(t) = \mathbf{E}\{X(t)\} = \mathbf{E}\{tW(t^{-1})\} = tm_W(t^{-1}) = t\cdot 0 = 0$ och $r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s),X(t)\} = \mathbf{Cov}\{sW(s^{-1}),tW(t^{-1})\} = st\,r_W(s^{-1},t^{-1}) = st\,\sigma^2\min\{s^{-1},t^{-1}\} = \sigma^2\min\{sts^{-1},stt^{-1}\} = \sigma^2\min\{t,s\}$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 1)}}$ $\boxed{\text{a}}$ Utnyttja t.ex. följande `Mathematica`-kod:

```
In[1]:= <<Statistics`ContinuousDistributions`
In[2]:= n=1000; antal=0; steg[t_]:=If[t>=0,1,0];
In[3]:= For[i=0,i<=n,i++,
  xi=N[Table[Random[ExponentialDistribution[1]],{50}]];
  hopp=Table[Sum[xi[[i]],{i,1,k}],{k,1,50}];
  X[t_]:=Sum[steg[t-hopp[[k]]],{k,1,50}]-t;
  maxima=NMax[Table[X[k/100],{k,0,1000}];
  If[maxima>0,antal=antal+1]]
In[3]:= Pskattn=antal/n
```

$\boxed{\text{b}}$ Första frågan är övning 0.12 i boken, och lösning finns där. Skattningen är inte beroende av regulariteten för g, och därmed vid irregularitet bra jämfört med konventionella metoder, som ju i allmänhet fordrar regularitet.

`Uppgift 6 (projekt 2)` **a** Enligt teorin för signalanpassat filter löser det optimala filtrets impulssvar $h(u)$ för detektering vid tiden t ekvationen $s(t-u) = h_t \star r_W(u)$. Insatt $t=(n+1)T$, $r_W(u) = (N_0/2)\,\delta(u)$ samt $s(t)=1$ för $t\in[0,T]$ och $s(t)=0$ för övrigt, så ger detta $s((n+1)T-u) = (N_0/2)\,h(u)$, dvs. $h(u)=2/N_0$ för $u\in[nT,(n+1)T]$ och $h(u)=0$ för övrigt, vilket så när som på en oviktig konstant är det impulssvar som utnyttjas i projektet.

b Detta kan man om man gjort projektet ordentligt.