Tentamen i stokastiska processer den 18/8 - 04

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, Beta och projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 772 3512.

Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Tentamensresultatet anslås i MV-husets källare, och meddelas via email till dem som anger email-adress på tentamensomslaget. Lösningar till tentamen lägges ut på `www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/Chalmers/TMA421` efter tentamens slut.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda men ej överdrivet fullständigt.

`Uppgift 1` Bestäm spektraltätheten $\mathcal{P}_X(f)$ för en svagt stationär process $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ med $X(k)+\sum_{\ell=1}^{p} a_\ell X(k-\ell) = e(k)+\sum_{\ell=1}^{q} c_\ell e(k-\ell)$ för $k\in\mathbb{Z}$, där $\{e(\ell)\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus samt $a_1,\ldots,a_p,c_1,\ldots,c_q\in\mathbb{R}$ och $p,q\in\mathbb{N}$ konstanter. **(5 poäng)**

`Uppgift 2` Låt $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ vara en integrerbar funktion [dvs. $\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}|g(x_1,\ldots,x_n)|\,dx_1\ldots dx_n<\infty$] med integrerbar Fouriertransform $(\mathcal{F}g)(t_1,\ldots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}g(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$ [dvs. $\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}|(\mathcal{F}g)(t_1,\ldots,t_n)|\,dt_1\ldots dt_n<\infty$]. Det finns ett enkelt samband mellan g och Fouriertransformen av Fouriertransformen av g [dvs. $\mathcal{F}\mathcal{F}g$]. Härled detta samband! **(5 poäng)**

`Uppgift 3` Bestäm de villkor på väntevärdesfunktionen $m_X(t)=\mathbf{E}\{X(t)\}$ och kovariansfunktionen $r_X(s,t)=\mathbf{Cov}\{X(s),X(t)\}$ under vilka en Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med $X(0)=0$ är en Lévyprocess. (OBS: Motivering krävs!) **(5 poäng)**

`Uppgift 4` `a` Beräkna korskorrelationsfunktionen $\rho_{Z_1,Z_2}(s,t)$ mellan processerna $Z_1(t)=X(t)+Y(t)$ och $Z_2(t)=X(t)-Y(t)$ då $X(t)$ och $Y(t)$ är oberoende Poissonprocesser med intensiteter λ_X respektive λ_Y. **(1.5 poäng)**

`b` Visa att komponenterna ξ och η för en $\mathbb{R}^2$-värd stokastisk variabel (ξ,η) med möjliga värden $\Omega_{(\xi,\eta)}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ är oberoende om och endast om de är okorrelerade. **(3.5 poäng)**

`Uppgift 5` `a` Finns det en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ som har andramomentfunktion $\mathbf{E}\{X(s)X(t)\}=\max\{s,t\}$? (OBS: Motivering krävs!) **(2.5 poäng)**

`b` Visa att om $r_1(s,t),r_2(s,t),r_3(s,t),\ldots$ är kovariansfunktioner och gränsvärdet $r(s,t)=\lim_{k\to\infty}r_k(s,t)$ existerar, så är $r(s,t)$ en kovariansfunktion. **(2.5 poäng)**

`Uppgift 6` Diskutera fem distinkta (=olika) och rimligt substantiella (=betydelsefulla) upplevelser från arbetet med ett av de båda projekten. **(5 poäng)**

`Lycka till!`

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 18/8 - 04

$\boxed{\texttt{Uppgift 1}}$ Övning 7.9 i Albins bok – se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2}}$ (Övning 6.10 i Albins bok.) Enligt Fouriers inversionsformel gäller att $g(x_1,\ldots,x_n) = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}g)(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}(\mathcal{F}g)(t_1,\ldots,t_n)\, dt_1\ldots dt_n = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i2\pi[t_1(-x_1)+\ldots+t_n(-x_n)]}(\mathcal{F}g)(t_1,\ldots,t_n)\, dt_1\ldots dt_n = (\mathcal{F}\mathcal{F}g)(-x_1,\ldots,-x_n)$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ (Övning 4.15 i Albins bok.) Enligt exempel 2.1 i Albins bok måste en Lévyprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med $X(0)=0$ ha väntevärdesfunktion $m_X(t) = m_X(1)\,t$ och kovariansfunktion $r_X(s,t) = V_X(1)\,\min\{s,t\}$. En Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med sådan väntevärdesfunktion och kovariansfunktion kan beskrivas enligt $X(t) = V_X(1)^{1/2}\,W(t) + m_X(1)\,t$, där $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en standard Wienerprocess. Det följer direkt att en sådan process X har oberoende ökningar. Vidare är X:s ökningar stationära eftersom $X(t+h)-X(t) = V_X(1)^{1/2}[W(t+h)-W(t)] + m_X(1)\,[(t+h)-t] =_{\text{fördelning}} V_X(1)^{1/2}W(h) + m_X(1)\,h$, som ej beror av t.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Övning 2.3 i Albins bok – se lösning där.

$\boxed{\texttt{b}}$ (Övning 2.4 i Albins bok.) Att ξ och η är okorrelerade innebär att $\mathbf{E}\{\xi\eta\} = \mathbf{E}\{\xi\}\,\mathbf{E}\{\eta\}$, dvs. att $0\cdot 0\cdot p + 0\cdot 1\cdot q + 1\cdot 0\cdot r + 1\cdot 1\cdot(1-p-q-r) = [0\cdot(p+q) + 1\cdot(r+1-p-q-r)]\,[0\cdot(p+r) + 1\cdot(q+1-p-q-r)]$. Detta innebär att $1-p-q-r = (1-p-q)(1-p-r)]$, som kan förenklas till $p = (p+q)\,(p+r)$. Å andra innebär oberoende mellan ξ och η att

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\xi=0,\eta=0\} = \mathbf{P}\{\xi=0\}\,\mathbf{P}\{\eta=0\} \\ \mathbf{P}\{\xi=0,\eta=1\} = \mathbf{P}\{\xi=0\}\,\mathbf{P}\{\eta=1\} \\ \mathbf{P}\{\xi=1,\eta=0\} = \mathbf{P}\{\xi=1\}\,\mathbf{P}\{\eta=0\} \\ \mathbf{P}\{\xi=1,\eta=1\} = \mathbf{P}\{\xi=1\}\,\mathbf{P}\{\eta=1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p &= (p+q)\,(p+r) \\ q &= (p+q)\,(1-p-r) \\ r &= (1-p-q)\,(p+r) \\ 1-p-q-r &= (1-p-r)\,(1-p-q) \end{cases},$$

vilket i sin tur lätt ses vara uppfyllt om och endast om $p = (p+q)\,(p+r)$, dvs. om och endast om ξ och η är okorrelerade.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Övning 2.11 i Albins bok – se lösning där.

$\boxed{\texttt{b}}$ (Övning 2.12 i Albins bok.) Eftersom $r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t), \ldots$ är kovariansfunktioner så är de symmetriska och positivt semidefinita funktioner (sats 2.2 i Albins bok). Man ser lätt att då är även gränsvärdet $r(s,t) = \lim_{k\to\infty} r_k(s,t)$ en symmetrisk och positivt semidefinit funktion, dvs. en kovariansfunktion (sats 2.2 i Albins bok igen).