Tentamen i stokastiska processer den 15/12 fm i V

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
LÄRARE: Patrik Albin 772 3512.
Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM.

Tentamensresultatet anslås i MV-husets källare, samt meddelas via email till dem som tydligt skriver sin email-adress på tentamensomslaget. Lösningar till tentamen läggs ut på kurshemsidan så snart som möjligt efter tentamens slut.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda men ej överdrivet fullständigt.

`Uppgift 1` Låt X, Y och Z vara stokastiska variabler med variansmatris

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Var}\{X\} & \mathbf{Cov}\{X,Y\} & \mathbf{Cov}\{X,Z\} \\ \mathbf{Cov}\{Y,X\} & \mathbf{Var}\{Y\} & \mathbf{Cov}\{Y,Z\} \\ \mathbf{Cov}\{Z,X\} & \mathbf{Cov}\{Z,Y\} & \mathbf{Var}\{Z\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

`a` Finns det något tal ρ sådant att de stokastiska variablerna X och $X+\rho Z$ är okorrelerade? **(1.5 poäng)**

`b` Vilket är det största resp. minsta värdet variansen $\mathbf{Var}\{X+\rho Y\}$ kan ta för olika tal ρ? **(2.5 poäng)**

`c` Hur kan man visa att den givna variansmatrisen verkligen är en variansmatris, dvs. att X, Y och Z kan ha de givna varianserna och kovarianserna?

Beviset behöver inte utföras, utan det räcker ange en tydlig plan för hur beviset skall gå till! **(1 poäng)**

`Uppgift 2` Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ och $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara stationära Gaussiska processer med väntevärden $m_X = m_Y = 0$, spektraltätheter $\mathcal{P}_X(f)$ resp. $\mathcal{P}_Y(f)$, och korsspektraltäthet $\mathcal{P}_{X,Y}(f)$. Förklara hur man med utgångspunkt från denna information kan beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{X(1)+X(2)+Y(3) > 3\}$.

Sannolikheten behöver ej beräknas, utan det räcker ange en tydlig plan för hur beräkningen skall gå till! **(5 poäng)**

`Uppgift 3` Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara en svagt stationär process med väntevärde 0 och känd kovariansfunktion $r_X(\tau)$. Man har observerat värdena $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$ för $X(-2), X(-1), X(0), X(1), X(2)$. Dock misstänker man att observationen x_0 är felaktig. Därför gör man en skattning $\hat{X}(0)$ av $X(0)$ med hjälp av observationerna x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, och beslutar att observationen x_0 är felaktig om kvoten

$$\frac{(\hat{X}(0)-x_0)^2}{\mathbf{E}\{X(0)^2\}} > 2.$$

`a` Förklara hur man på (i någon vettig mening) “bästa sätt” kan utföra skattningen av $X(0)$ och sedan beslutet med hjälp av den givna informationen. **(4 poäng)**

`b` Vad kan man göra för att besluta om observationen x_0 är korrekt då kovariansfunktion $r_X(\tau)$ ej är känd? **(1 poäng)**

`Uppgift 4` Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara en stationär Gaussisk process med väntevärde $m_X = 1$ och kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$.

$\boxed{\text{a}}$ Hur kan man beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X(k) > 1\}$? **(2.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Låt $\{Y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vara utsignalen från filtret med insignal $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ och impulssvar $h_1(k) = 2^{-k}$ för $k \geq 0$ samt $h_1(k) = 0$ för övrigt. Ange det impulssvar $h_2(k)$ som är sådant att om $\{Y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ är insignal till filtret så blir utsignalen $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, dvs. $X(t)$ återskapas i diskreta tidpunkter $t \in \mathbb{Z}$. **(2.5 poäng)**

`Uppgift 5` $\boxed{\text{a}}$ Ge ett exempel på en stationär Lévy-process. **(1 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Ge ett exempel på en Lévy-process som ej är självsimilär. **(1 poäng)**

$\boxed{\text{c}}$ Ge ett exempel på en självsimilär process som ej är en Lévy-process. **(1 poäng)**

$\boxed{\text{d}}$ Finns processer som varken är stationära, självsimilära eller Lévy-processer? **(1 poäng)**

$\boxed{\text{e}}$ Ge ett exempel på en svagt stationär process som ej är stationär. **(1 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 1)` En Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1 kan beskrivas som ett "halvt hagelbrus"

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t - \sum_{j=1}^{k} \xi_j\right) \qquad \text{för} \quad t \geq 0,$$

där $\xi_1, \xi_2, \ldots$ är oberoende exp(1)-fördelade stokastiska variabler och $g(t) = 1$ för $t \geq 0$ samt $g(t) = 0$ för $t < 0$.

$\boxed{\text{a}}$ Förklara påståendet att Poisson-processen är ett halvt hagelbrus. **(1 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Hur kan man med hjälp av datorsimuleringar uppskatta sannolikheten

$$\mathbf{P}\{X(t) - t \geq 4 \text{ för något } t \in [0, 10]\}. \qquad \textbf{(3 poäng)}$$

$\boxed{\text{c}}$ Hur kan man simulera en Poisson-fördelad stokastisk variabel i dator? **(1 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 2)` $\boxed{\text{a}}$ Hur kan man med hjälp av provtransmissioner uppskatta bitfelssannolikheten för ett digitalt kommunikationssystem. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Vad kan tänkas orsaka att den enligt deluppgift a skattade bitfelssannolikheten inte överensstämmer med den teoretsikt beräknade enligt projekt 2. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\text{c}}$ Beräkna variansen $\mathbf{Var}\{X(1)\}$ för en svagt staionär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = 1$ för $f \in \mathbb{R}$. **(1 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 3)` $\boxed{\text{a}}$ Förklara hur man mha. Maximum Likelihood metoden kan skatta värdet av parametern $\lambda > 0$ för ett datamaterial $x_1, \ldots, x_n$ av observationer $X_1, \ldots, X_n$ av en exp(λ)-fördelning. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\text{b}}$ Vilken fördelning har den stokastiska variablen $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ då X är en exp(λ)-fördelad stokastisk variabel? **(1.5 poäng)**

$\boxed{\text{c}}$ Betrakta en prismodell $S(t) = S(0)\,\mathrm{e}^{X(t)-X(0)+\mu t}$ där $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en process som har stationära ökningar som dock ej är oberoende. Diskutera vilka nya svårigheter som uppstår med en sådan modell jämfört situationen projekt 3 där $X(t)$ är en Lévy-process. Säg något om de praktiskt ekonomiska konsekvenser en sådan modell kan ha jämfört en baserad på Lévy-processerer. **(2 poäng)**

`Lycka till!`

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 15/12

$\boxed{\texttt{Uppgift 1}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ $\mathbf{Cov}\{X, X+\rho Z\} = \mathbf{Var}\{X\} + \rho\,\mathbf{Cov}\{X, Z\} = 1 + \rho \cdot 0 = 1 \neq 0$.

$\boxed{\texttt{b}}$ $\mathbf{Var}\{X+\rho Y\} = \mathbf{Var}\{X\} + \rho^2\mathbf{Var}\{Y\} + 2\,\rho\,\mathbf{Cov}\{X,Y\} = 1 + 2\,\rho^2 + 2\,\rho = 2\,[(\rho+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]$ som antar alla värden i intervallet $[\frac{1}{4}, \infty)$.

$\boxed{\texttt{c}}$ Kontrollera att egenvärdena är icke-negativa.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2}}$ $\mathbf{P}\{X(1)+X(2)+Y(3) > 3\} = 1 - \Phi((3-\mu)/\sigma)$ där $\mu = \mathbf{E}\{X(1)+X(2)+Y(3)\} = m_X + m_X + m_Y = 0$ och $\sigma^2 = \mathbf{Var}\{X(1)+X(2)+Y(3)\} = \mathbf{Var}\{X(1)\} + \mathbf{Var}\{X(2)\} + \mathbf{Var}\{Y(3)\} + 2\,\mathbf{Cov}\{X(1),X(2)\} + 2\,\mathbf{Cov}\{X(1),Y(3)\} + 2\,\mathbf{Cov}\{X(2),Y(3)\} = r_X(0) + r_X(0) + r_Y(0) + 2\,r_X(1) + 2\,r_{X,Y}(2) + 2\,r_{X,Y}(1) = \int_{-\infty}^{\infty}[\mathcal{P}_X(f)(2+2\mathrm{e}^{i2\pi f}) + \mathcal{P}_Y(f) + \mathcal{P}_{X,Y}(f)(2\mathrm{e}^{i2\pi f}2+2\mathrm{e}^{i4\pi f})]\,df$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Skatta $X(0)$ med den linjärkombination $a\,(X(-2)+X(2)) + b\,(X(-1)+X(1))$ som minimerar $\mathbf{E}\{[a\,(X(-2)+X(2))+b\,(X(-1)+X(1))-X(0)]^2\} = a^2(2r_X(0)+2r_X(4)) + b^2(2r_X(0)+2r_X(2)) + r_X(0) + 2ab(2r_X(1)+2r_X(3)) + 4ar_X(2) + 4br_X(1)$, vilket efter derivering med avseende på a och b ger ekvationerna

$$\begin{cases} 4a(r_X(0)+r_X(4)) + 4b(r_X(1)+r_X(3)) + 4r_X(2) = 0 \\ 4b(r_X(0)+r_X(2)) + 4a(r_X(1)+r_X(3)) + 4r_X(1) = 0 \end{cases},$$

varur man löser ut a och b. Eftersom $\mathbf{E}\{X(0)^2\} = r_X(0)$ blir sedan testen

$$\frac{[a\,(x_{-2}+x_2) + b\,(x_{-1}+x_1) - x_0]^2}{r_X(0)} > 2.$$

$\boxed{\texttt{b}}$ Man skattar kovariansfunktionen med hjälp av data, och använder sedan den skattade kovariansfunktionen $\hat{r}_X(\tau)$ istf. den $r_X(\tau)$ i testen ovan.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Om $Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k X(t-k)$ så är $m_Y = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k m_X = 2\,m_X = 2$ och $\mathbf{Var}\{Y(t)\} = \int_{-1/2}^{1/2}\mathcal{P}_Y(f)\,df = \int_{-1/2}^{1/2}\mathcal{P}_X(f)|\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k\mathrm{e}^{-i2\pi fk}|^2\,df = \int_{-1/2}^{1/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|k|}\mathrm{e}^{-i2\pi fk}\,|\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k\mathrm{e}^{-i2\pi fk}|^2\,df = \frac{8\mathrm{e}+4}{6\mathrm{e}-3}$ med hjälp av följande Mathematica beräkning

```
In[1]:= Integrate[Simplify[ComplexExpand[Sum[Exp[k]*Exp[-I*2*Pi*f*k],
           {k,-Infinity,0}]+Sum[Exp[-k]*Exp[-I*2*Pi*f*k],{k,1,
           Infinity}],TargetFunctions->{Re,Im}]]*Simplify[
           ComplexExpand[Abs[Sum[2^k*Exp[I*2*Pi*f*k],{k,-Infinity,0}]
           ]^2,TargetFunctions->{Re,Im}]],{f,-1/2,1/2}]
```

Out[1]= $\frac{8\mathrm{e}+4}{6\mathrm{e}-3}$

Det följer att $\mathbf{P}\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}X(k) > 1\} = \mathbf{P}\{Y(0)>1\} = 1 - \Phi\left((1-2)/\sqrt{\frac{8\ \mathrm{e}+4}{6\mathrm{e}-3}}\right)$.

$\boxed{\texttt{b}}$ Med $h_2(0)=1$, $h_2(1)=-\frac{1}{2}$ och $h_2(k)=0$ för övrigt blir $(h_2\star Y)(k) = Y(k) - \frac{1}{2}Y(k-1) = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell}X(k-\ell) - \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell}X(k-1-\ell) = X(k) + \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell}X(k-\ell) - \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell-1}X(k-\ell) = X(k)$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ $X(t)=0$.

$\boxed{\texttt{b}}$ Poisson-processen, ty det visas i ett övningstal att den ej är självsimilär.

$\boxed{\texttt{c}}$ $X(t)=t^2$: det visas i ett övningstal att $X(t)$ är självsimilär, och $X(t+h)-X(t) = 2th+h^2$ beror av t så att $X(t)$ ej har stationära ökningar och ej är en Lévy-process.

$\boxed{\texttt{d}}$ Ja, t.ex. $X(t)=1+t^2$ ses lätt uppfylla alla dessa krav.

$\boxed{\texttt{e}}$ Diskret vitt brus där varannan brusterm är $\mathrm{N}(0,1)$-fördelad och varannan likformigt fördelad över intervallet $(-\sqrt{6},\sqrt{6})$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 1)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Poisson-processen är ett halvt hagelbrus, och hör sen!

$\boxed{\texttt{b}}$ Enligt en smärre modifiering av lösningen till programmeringsuppgift 1 c.

$\boxed{\texttt{c}}$ En $\mathrm{Po}(\lambda)$-fördelad stokastisk variabel erhålles genom att simulera värdet $X(\lambda)$ för en Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 2)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Enligt uppgift 4 i projektet.

$\boxed{\texttt{b}}$ Bruset är kanske inte normalfördelat, eller så är det inte helt "vitt".

$\boxed{\texttt{c}}$ $\mathbf{Var}\{X(1)\} = r_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_X(f)\,df = \infty$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 3)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ $\frac{d}{d\lambda}\ln(\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)) = \frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^n \ln(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x_i}) = \sum_{i=1}^n(\frac{1}{\lambda} - x_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/\overline{x}$.

$\boxed{\texttt{b}}$ $\mathbf{P}\{\mathrm{e}^{-\lambda X}\leq x\} = \mathbf{P}\{-\lambda X \leq \ln(x)\} = \mathbf{P}\{X \geq -\ln(x)/\lambda\} = 1 - F_X(\ln(x)/\lambda) = \mathrm{e}^{-lambda(\ln(x)/\lambda)} = x$, så $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ är likformigt fördelad över $[0,1]$.

$\boxed{\texttt{c}}$ Maximum likelihood metoden fungerar inte som tidigare eftersom log-inkrementen ej är oberoende. En modell där ökningarna ej är oberoende ger möjlighet att "titta in i framtiden", dvs. det kan finnas "free lunches".