# Tentamen i stokastiska processer den 30/3 fm i V

Hjälpmedel: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
Lärare: Patrik Albin 772 3512.
Övningstentamen ger bonus vid denna omtentamen enligt KursPM.

Tentamensresultatet anslås i MV-husets källare, samt meddelas via email till dem som tydligt skriver sin email-adress på tentamensomslaget. Lösningar till tentamen läggs ut på kurshemsidan så snart som möjligt efter tentamens slut.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda men ej överdrivet fullständigt.

Uppgift 1 a Bestäm kovariansfunktionen för den stokastioska processen $X(t) = \mathrm{e}^{-t}\,Y(\mathrm{e}^{2t})$, $t\in\mathbb{R}$, då $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poissonprocess men intensitet 1. **(2.5 poäng)**

b Bestäm korskorrelationsfunktionen

$$\rho_{Z_1,Z_2}(s,t) = \frac{\mathbf{Cov}\{Z_1(s),Z_2(t)\}}{\sqrt{\mathbf{Var}\{Z_1(s)\}\,\mathbf{Var}\{Z_2(t)\}}}$$

mellan $Z_1(t) = X(t)+Y(t)$ och $Z_2(t) = X(t)-Y(t)$, då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är oberoende Poissonprocesser med intensiteter $\lambda_X$ respektive $\lambda_Y$. **(2.5 poäng)**

Uppgift 2 a Bestäm talet $\varrho\in\mathbb{R}$ så att $\xi_1-\varrho\xi_2$ och $\xi_2$ blir oberoende stokastiska variabler, då $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ är en $\mathbb{R}^2$-värd normalfördelad stokastisk variabel med känd variansmatris

$$\mathbf{Var}\{\xi\} = \begin{pmatrix} \mathbf{Var}\{\xi_1\} & \mathbf{Cov}\{\xi_1,\xi_2\} \\ \mathbf{Cov}\{\xi_1,\xi_2\} & \mathbf{Var}\{\xi_2\} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2.5 poäng)}$$

b Bestäm sannolikheten $\mathbf{P}\{X(s)\geq X(t)\}$ i fallen $r_X(t-s)\neq r_X(0)$ och $r_X(t-s) = r_X(0)$, för en stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. **(2.5 poäng)**

Uppgift 3 a Bestäm variansen $\mathbf{Var}\{X'(t)\}$ för derivatan av en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = |f|/(1+f^2)^3$. **(2.5 poäng)**

b Definiera funktionen $r:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ genom $r(0)=a$, $r(1)=b$, $r(-1)=c$ och $r(k)= 0$ för övrigt. För vilka tal $a,b,c\in\mathbb{R}$ är $r$ en kovariansfunktion? **(2.5 poäng)**

Uppgift 4 Sätt $X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k e(t-k)$, där $\ldots,e(-1),e(0),e(1),\ldots$ är oberoende $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$-fördelade stokastiska variabler och $a$ ett tal sådant att $0<|a|<1$. Förklara varför summan konvergerar och varför $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är en Gaussisk process, samt bestäm processens kovariansfunktion $r_X(t)$. **(5 poäng)**

Uppgift 5 Skatta processvärdet $X(0)$ för en MA(1)-process med $\sigma^2 = 1$, men med koefficienten $c_1$ okänd, med utnyttjande av observationer av processvärdena $X(\pm 1), X(\pm 3), X(\pm 5),\ldots,X(\pm(2k-1))$. **(5 poäng)**

Uppgift 6 Diskutera fem distinkta (=olika) och rimligt substantiella (=betydelsefulla) upplevelser från arbetet med ett av de tre projekten. **(5 poäng)**

Lycka till!

# Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 30/3

$\boxed{\texttt{Uppgift 1}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Detta är övning 2.1 i Albins bok: $r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = \mathbf{Cov}\{\mathrm{e}^{-s}Y(\mathrm{e}^{2s}), \mathrm{e}^{-t}Y(\mathrm{e}^{2t})\} = \mathrm{e}^{-s-t}r_Y(\mathrm{e}^{2s}, \mathrm{e}^{2t}) = \mathrm{e}^{-s-t}\mathbf{Var}\{Y(1)\}\min\{\mathrm{e}^{2s}, \mathrm{e}^{2t}\} = \mathrm{e}^{-s-t}\min\{\mathrm{e}^{2s}, \mathrm{e}^{2t}\} = \min\{\mathrm{e}^{s-t}, \mathrm{e}^{t-s}\} = \mathrm{e}^{-|t-s|}$.

$\boxed{\texttt{b}}$ Detta är övning 2.3 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Detta är övning 4.2 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{b}}$ Detta är övning 4.6 i Albins bok: $\mathbf{P}\{X(s) \geq X(t)\} = \mathbf{P}\{X(s)-X(t) \geq 0\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(\mathbf{E}\{X(s)-X(t)\}, \mathbf{Var}\{X(s)-X(t)\}) \geq 0\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(0, 2[r_X(0)-r_X(t-s)]) \geq 0\}$, som är $\frac{1}{2}$ då $r_X(t-s) \neq r_X(0)$ och 1 då $r_X(t-s) = r_X(0)$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Detta är övning 6.2 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{b}}$ Detta är övning 6.22 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ Detta är övning 4.8 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ Detta är övning 9.19 i Albins bok: se lösning där.