Tentamen i stokastiska processer den 17/8 fm i V

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
LÄRARE: Patrik Albin 772 3512.
JOUR: Johan Tykesson 772 5379.
Övningstentamen ger bonus vid denna omtentamen enligt KursPM.

Tentamensresultatet anslås i MV-husets källare, samt meddelas via email till dem som tydligt skriver sin email-adress på tentamensomslaget.

Inlämnade svar skall motiveras någorlunda men ej överdrivet fullständigt.

`Uppgift 1` En så kallad linjär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ges av $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e(t-k)$ för $t\in\mathbb{Z}$, där $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus med varians σ^2 och $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ är reella tal sådana att $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|<\infty$.

Visa att $X(t)$ är en svagt stationär process med väntevärdesfunktion $m_X=0$ och kovariansfunktion $r_X(t)=\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k c_{k+t}$. **(5 poäng)**

`Uppgift 2` Beräkna sannolikheten $\mathbf{P}\{W(2)>W(1)+3\}$ för en standard Wiener-process $\{W(t)\}_{t\geq 0}$. **(5 poäng)**

`Uppgift 3` Över en seriekoppling av resistansen R och induktansen L anbringas en svagt stationär spänning $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ange ett samband mellan kovariansfunktionerna $r_X(t)$ för $X(t)$ och $r_U(t)$ för spänningen $U(t)$ över induktansen. Utnyttja därvid det kända faktumet från elläran att $U'(t)+(R/L)U(t)=X'(t)$. **(5 poäng)**

`Uppgift 4` Visa att funktionen $R:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ given av $R(0)=1+m^2$ och $R(k)=2^{-|k|}|k|+m^2$ för $k\neq 0$ är andramomentfunktion för någon tidsdiskret stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$: här är m ett reellt tal. Bestäm även motsvarande effektspektraltäthet $\mathcal{S}_X(f)$. **(5 poäng)**

`Uppgift 5` Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara Gaussiskt diskret vitt brus med okänd varians σ^2. Bestäm talet $\mathcal{D}_n>0$ så att $(\sigma^2)_n^\star=\mathcal{D}_n(e(1)^2+\ldots+e(n)^2)$ är en väntevärdesriktig skattning av σ^2. Beräkna även variansen $\mathbf{Var}\{(\sigma^2)_n^\star\}$ för skattningen och gör ett approximativt konfidensintervall för σ^2. **(5 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 1)` `a` En Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1 kan beskrivas som ett "halvt hagelbrus"

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}g\big(t-\textstyle\sum_{j=1}^{k}\xi_j\big)\qquad\text{för}\quad t\geq 0,$$

där $\xi_1,\xi_2,\ldots$ är oberoende exp(1)-fördelade stokastiska variabler och $g(t)=1$ för $t\geq 0$ samt $g(t)=0$ för $t<0$.

Förklara påståendet att Poisson-processen är ett halvt hagelbrus. **(1 poäng)**

`b` Hur kan man med hjälp av datorsimuleringar för en Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1 uppskatta sannolikheten

$$\mathbf{P}\{X(t)-t\geq 4\ \text{ för något }\ t\in[0,10]\}\ ? \qquad \textbf{(3 poäng)}$$

`c` Hur kan man simulera en binomialfördelad stokastisk variabel? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 2)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Hur kan man med hjälp av provtransmissioner uppskatta bitfelssannolikheten för ett digitalt kommunikationssystem? **(2 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Om den enligt deluppgift a skattade bitfelssannolikheten inte överensstämmer med den teoretsikt beräknade enligt projekt 2, vilket värde skall man då lita på (om något)? Diskutera! **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{c}}$ Vitt brus $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ i kontinuerlig tid bör ha konstant spektraltäthet $\mathcal{P}_W(f)=N_0/2$ för alla frekvenser $f\in\mathbb{R}$, för någon konstant $N_0\geq 0$. Variansen $\mathbf{Var}\{W(t)\}$ blir då oändlig, såvida ej $N_0=0$! Diskutera! **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 3)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Beskriv hur man med hjälp av maximum likelihood-metoden kan skatta värdet av parametern $\lambda>0$ för ett datamaterial $x_1,\ldots,x_n$ av observationer $X_1,\ldots,X_n$ av en kontinuerlig stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f_X(x)=\lambda^{-1}\mathrm{e}^{-x/\lambda}$ för $x>0$. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Bestäm fördelningsfunktionen $F_Y(y)=\mathbf{P}\{Y\leq y\}$ för den stokastiska variabeln $Y=\ln(X)$ då X är en $\exp(\lambda)$-fördelad stokastisk variabel. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{c}}$ Betrakta en prismodell $S(t)=S(0)\,\mathrm{e}^{X(t)-X(0)+\mu t}$ där $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en process som har oberoende ökningar som dock ej är stationära. Diskutera vilka nya svårigheter som uppstår med en sådan modell jämfört situationen projekt 3 där $X(t)$ är en Lévy-process. Säg något om de praktiskt ekonomiska konsekvenser en sådan modell kan ha jämfört en baserad på Lévy-processerer. **(2 poäng)**

$\boxed{\texttt{Lycka till!}}$

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 17/8

$\boxed{\texttt{Uppgift 1}}$ Detta är exempel 3.1 i Albins bok.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2}}$ Detta är övning 4.11 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ Detta är övning 3.5 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ Detta är övning 6.24 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ Detta är övning 9.2 i Albins bok: se lösning där.