

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 7723512.

Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM. Tentamensresultatet anslås i E-huset och meddelas via email. Inlämnade svar skall motiveras.

Uppgift 1. I denna uppgift är $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ en stokastisk process med väntevärde $\mathbf{E}\{X(t)\} = 0$ för $t \geq 0$. De n -dimensionella fördelningarna för processen $X(t)$, för något val av $n \in \mathbb{N}$, är fördelningsfunktionerna av typ

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x) = \mathbf{P}\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad \text{för } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \geq 0.$$

a Är kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna, $F_{X(t)}(x) = \mathbf{P}\{X(t) \leq x\}$, tillräcklig för att bestämma $\mathbf{P}\{\max_{t \geq 0} X(t) \leq x\}$ för $x \in \mathbb{R}$? **(1 poäng)**

b Är kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna tillräcklig för att avgöra om $X(t)$ är en Poisson process? **(1 poäng)**

c Kan, åtminstone ibland, kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna vara tillräcklig för att visa att $X(t)$ ej är självsimilär? **(1 poäng)**

d Är kännedom om de 2-dimensionella fördelningarna, $F_{X(s), X(t)}(x, y) = \mathbf{P}\{X(s) \leq x, X(t) \leq y\}$, tillräcklig för avgöra om $X(t)$ är bandbegränsat vitt brus? **(1 poäng)**

e Är kännedom om de 3-dimensionella fördelningarna, $F_{X(r), X(s), X(t)}(x, y, z) = \mathbf{P}\{X(r) \leq x, X(s) \leq y, X(t) \leq z\}$, tillräcklig för att bestämma om $X(t)$ är svagt stationär? **(1 poäng)**

Uppgift 2 Bestäm $\mathbf{P}\{X(s) \geq X(t)\}$ för en stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\}$ i fallen $r_X(t-s) \neq r_X(0)$ och $r_X(t-s) = r_X(0)$. **(5 poäng)**

Uppgift 3 **a** Bestäm variansen $V_X(t) = \mathbf{Var}\{X(t)\}$ för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = |f|/(1+f^2)^{3/2}$. **(2.5 poäng)**

b Bestäm variansen $V_{X'}(t) = \mathbf{Var}\{X'(t)\}$ för derivatan $X'(t)$ av en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f) = |f|/(1+f^2)^3$. **(2.5 poäng)**

Uppgift 4 Låt $\{e(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ vara Gaussiskt diskret vitt brus med okänd varians σ^2 . Bestäm koefficienten $\mathcal{D}_n > 0$ så att $(\sigma^2)_n^* = \mathcal{D}_n[e(1)^2 + \dots + e(n)^2]$ blir en väntevärdesriktig skattning av σ^2 . Beräkna skattningens varians $\mathbf{Var}\{(\sigma^2)_n^*\}$ och gör ett approximativt konfidensintervall för σ^2 . **(5 poäng)**

Uppgift 5 Är Hilberttransformen av en deriverbar svagt stationär process deriverbar? **(5 poäng)**

Uppgift 6. Diskutera fem distinkta och rimligt substantiella upplevelser, ifrån arbetet med projektet. **(5 poäng)**

Lycka till!

Uppgift 1. **a** Nej: om tex. $X_1(t) = \xi$ för $t \geq 0$, där ξ är en $N(0, 1)$ -fördelad stokastisk variabel (fullständigt beroende process), och för processen $\{X_2(t)\}_{t \geq 0}$ varje processvärde är $N(0, 1)$ -fördelat oberoende av varje annat processvärde (fullständigt oberoende process), så har processerna samma 1-dimensionella $N(0, 1)$ -fördelningar. Men

$$\mathbf{P}\{\max_{t \geq 0} X_1(t) \leq x\} = \Phi(x) \neq \mathbf{P}\{\max_{t \geq 0} X_2(t) \leq x\} = 0,$$

ty $X_2(t)$ är "fullständigt otyglat" vitt brus, och därmed större än x någonstans.

b Nej: tag tex. $X(t)$ $Po(\lambda t)$ -fördelad för $t \geq 0$, med varje processvärde oberoende av varje annat processvärde. Då har $X(t)$ 1-dimensionella fördelningar som en Poisson process, utan att vara en sådan, ty Poisson processer har inte oberoende värden. Alternativt är svaret ja, eftersom Poisson processer ej har väntevärde 0.

c Ja, ty om $X(t)$ är självsimilär gäller att

$$F_{X(\lambda t)}(x) = \mathbf{P}\{X(\lambda t) \leq x\} = \mathbf{P}\{\lambda^\kappa X(t) \leq x\} = \mathbf{P}\{X(t) \leq \lambda^{-\kappa} x\} = F_{X(t)}(\lambda^{-\kappa} x),$$

så om detta skulle visa sig ej vara uppfyllt är $X(t)$ ej självsimilär.

d Ja, ty $X(t)$ är bandbegränsat vitt brus om $r_X(t) = \sigma^2 \sin(2\pi f_0 t) / (\pi t)$, och man kan bestämma kovariansfunktionen mha. de 2-dimensionella fördelningarna.

e Ja, ty $X(t)$ är svagt stationär om $r_X(t, t + \tau)$ ej beror av t , och man kan bestämma kovariansfunktionen mha. de 2-dimensionella fördelningarna. Dessa kan i sin tur bestämmas mha. de 3-dimensionella fördelningarna

$$F_{X(s), X(t)}(y, z) = \mathbf{P}\{X(s) \leq y, X(t) \leq z\} = F_{X(r), X(s), X(t)}(\infty, y, z).$$

Uppgift 2 Detta är övning 4.6 i Albins bok: $\mathbf{P}\{X(s) \geq X(t)\} = \mathbf{P}\{X(s) - X(t) \geq 0\} = \mathbf{P}\{N(\mathbf{E}\{X(s) - X(t)\}, \mathbf{Var}\{X(s) - X(t)\}) \geq 0\} = \mathbf{P}\{N(0, 2(r_X(0) - r_X(t-s))) \geq 0\}$, som blir $\frac{1}{2}$ då $r_X(0) \neq r_X(t-s)$ och 1 då $r_X(0) = r_X(t-s)$.

Uppgift 3 **a** Detta är övning 6.1 i Albins bok: notera att

$$V_X(t) = r_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f|}{(1+f^2)^{3/2}} df = \dots = 2.$$

b Detta är övning 6.2 i Albins bok: se lösningen där.

Uppgift 4 Detta är övning 9.2 i Albins bok: se lösningen där.

Uppgift 5 Detta är övning 8.9 i Albins bok: se lösningen där.