Tentamen i stokastiska processer den 19/4-2006 fm i V

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
LÄRARE: Patrik Albin 772 3512.
Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM. Tentamensresultatet anslås i MV-huset och meddelas via email. Inlämnade svar skall motiveras.

`Uppgift 1` `a` Låt $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara en svagt stationär process med väntevärdesfunktion $m_Y(t) = \mathbf{E}\{Y(t)\} = 1$ och kovariansfunktion

$$r_Y(\tau) = \mathbf{Cov}\{Y(t), Y(t+\tau)\} = \begin{cases} 1 & \text{för } \tau = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{för } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{för } |\tau| \geq 2 \end{cases}.$$

Går det att med den givna informationen beräkna $\mathbf{P}\{Y(1)+Y(-1) \geq 1\}$? (Motivering erfordras. Sannolikheten behöver ej beräknas om det går.) **(2 poäng)**

`b` Låt $Y(t)$ vara processen i deluppgift a och definiera processen $Z(t) = Y(t^2)$ för $t \in \mathbb{Z}$. Går det att med hjälp av den givna informationen bestämma korskovariansfunktionen $r_{Y,Z}(s,t) = \mathbf{Cov}\{Y(s), Z(t)\}$? (Motivering erfordras. Korskovariansfunktionen behöver inte beräknas om det går.) **(1.5 poäng)**

`c` Låt Y vara processen i deluppgift a och $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en svagt stationär process med känd kovariansfunktion $r_X(\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\}$. Går det att med hjälp av den givna informationen bestämma korskovariansfunktionen $r_{X,Y}(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), Y(t)\}$? (Motivering erfordras. Korskovariansfunktionen behöver inte beräknas om det går.) **(1.5 poäng)**

`Uppgift 2` Förklara hur man med hjälp av observationer $e(1), \ldots, e(n)$ av Gaussiskt diskret vitt brus $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med okänd varians $\sigma^2 \geq 0$ kan skatta sannolikheten $\mathbf{P}\{e(0) > 1\}$. **(5 poäng)**

`Uppgift 3` Är funktionen $r(t) = 1 + \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ för $t \in \mathbb{R}$ kovariansfunktion för någon svagt stationär process i kontinuerlig tid? (Motivering erfordras.) **(5 poäng)**

`Uppgift 4` Kan en Lévy-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ sådan att $X(0) = 0$ vara svagt stationär? (Motivering erfordras.) **(5 poäng)**

`Uppgift 5` Man observerar processvärdena $Y(1), \ldots, Y(n)$ för processen $Y(t) = \mu + X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, där $\mu \in \mathbb{R}$ är en konstant med okänt värde och $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ en MA(1)-process med kända koefficienter $c_1 \in \mathbb{R}$ och $\sigma^2 > 0$. Gör ett approximativt konfidensintervall för μ med hjälp av den givna informationen. **(5 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 1)` En Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1 kan beskrivas som ett "halvt hagelbrus"

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \xi_j\right) \qquad \text{för} \quad t \geq 0,$$

där $\xi_1, \xi_2, \ldots$ är oberoende exp(1)-fördelade stokastiska variabler och $g(t) = 1$ för $t \geq 0$ samt $g(t) = 0$ för $t < 0$.

$\boxed{\texttt{a}}$ Förklara påståendet att Poisson-processen är ett halvt hagelbrus. **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Hur kan man med hjälp av datorsimuleringar uppskatta sannolikheten

$$\mathbf{P}\{X(t)-t \geq 4 \text{ för något } t \in [0,10]\}. \qquad \textbf{(3 poäng)}$$

$\boxed{\texttt{c}}$ Hur kan man simulera en Poisson-fördelad stokastisk variabel i dator? **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 2)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Hur kan man med hjälp av provtransmissioner uppskatta bitfelssannolikheten för ett digitalt kommunikationssystem. **(2.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Vad kan tänkas orsaka att den enligt deluppgift a skattade bitfelssannolikheten inte överensstämmer med den teoretsikt beräknade enligt projekt 2. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{c}}$ Beräkna variansen $\mathbf{Var}\{X(1)\}$ för en svagt staionär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=1$ för $f\in\mathbb{R}$. **(1 poäng)**

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 3)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Förklara hur man mha. Maximum Likelihood metoden kan skatta värdet av parametern $\lambda>0$ för ett datamaterial $x_1,\ldots,x_n$ av observationer $X_1,\ldots,X_n$ av en $\exp(\lambda)$-fördelning. **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{b}}$ Vilken fördelning har den stokastiska variablen $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ då X är en $\exp(\lambda)$-fördelad stokastisk variabel? **(1.5 poäng)**

$\boxed{\texttt{c}}$ Betrakta en prismodell $S(t) = S(0)\,\mathrm{e}^{X(t)-X(0)+\mu t}$ där $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en process som har stationära ökningar som dock ej är oberoende. Diskutera vilka nya svårigheter som uppstår med en sådan modell jämfört situationen i projekt 3 där $X(t)$ är en Lévy-process. Säg något om de praktiskt ekonomiska konsekvenser en sådan modell kan ha jämfört en baserad på Lévy-processerer. **(2 poäng)**

$\boxed{\texttt{Lycka till!}}$

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 19/4

$\boxed{\texttt{Uppgift 1}}$ Detta är en lätt modifierad variant av uppgift 2 på övningstentamen 2 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2}}$ Eftersom $\mathbf{P}\{e(0)>1\} = 1-\mathbf{P}\{\mathrm{N}(0,\sigma^2)\leq 1\} = 1-\Phi(1/\sigma)$ skattas denna sannolikhet med $1-\Phi(1/\hat{\sigma})$ där $\hat{\sigma}$ är en skattning av σ, såsom (stickprovs-) standardavviklesen $s_e = \big(\sum_{i=1}^{n}(e(i)-\overline{e})^2/(n-1)\big)^{1/2}$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ Detta är en lätt modifierad variant av övning 6.18 i Albins bok.

Enligt Metod 6.1 i Albins bok kontrollerar vi om funktionen $\hat{r}(t) = r(t)-1 = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $t\in\mathbb{R}$, är en kovariansfunktion genom avgöra om dess inverstransform $\hat{\mathcal{P}}(f) = (\mathfrak{F}^{-1}\hat{r})(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi tf}\hat{r}(t)\,dt = \mathrm{e}^{-(2\pi t)^2/2}$ är ickenegativ, symmetrisk och integrerbar (se även sats 6.3 i Albins bok). Eftersom dessa tre kriterier alla är uppfyllda är $r(t)$ en kovariansfunktion.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ Detta är en lätt modifierad variant av övning 3.1 i Albins bok, tillika ett av kursens övningstal.

För att $X(t)$ skall vara svagt stationär måste dess väntevärdesfunktion $m_X(t)$ och variansfunktion $V_X(t)$ vara konstanta (se Sats 3.2 i Albins bok). Vidare är $m_X(t) = m_X(1)\,t$ och $V_X(t) = V_X(1)\,t$ för $t\geq 0$ enligt Exempel 2.1 i Albins bok. Eftersom funktionerna $m_X(t) = m_X(1)\,t$ och $V_X(t) = V_X(1)\,t$ är konstanta endast om $m_X(1)=0$ och $V_X(1)=0$ är dessa båda villkor nödvändiga för att $X(t)$ skall kunna vara svagt stationär, vilket i sin tur ger $m_X(t) = m_X(1)\,t = 0$ och $V_X(t) = V_X(1)\,t = 0$ för $t\geq 0$, så att $X(t)=0$ för $t\geq 0$. Om å andra sidan $X(t)=0$ för alla t så är $X(t)$ stationär och därmed svagt stationär. Vidare är $X(t)$ en Lévy-process eftersom dess ökningar (noll) är oberoende (ty konstanter är oberoende) och likafördelade. Med andra ord: $X(t)$ är en svagt stationär om och endast om $X(t)=0$ för $t\geq 0$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ Detta är en lätt modifierad variant av övning 9.4 i Albins bok, tillika ett av kursens hemövningstal. Se lösning i Albins bok.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 1)}}$ Se projektlitteraturen.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 2)}}$ Se projektlitteraturen.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 3)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ $\frac{d}{d\lambda}\ln(\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)) = \frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\lambda} - x_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/\overline{x}$.

$\boxed{\texttt{b}}$ $\mathbf{P}\{\mathrm{e}^{-\lambda X}\leq x\} = \mathbf{P}\{-\lambda X\leq \ln(x)\} = \mathbf{P}\{X\geq -\ln(x)/\lambda\} = 1-F_X(\ln(x)/\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda(\ln(x)/\lambda)} = x$, så $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ är likformigt fördelad över $[0,1]$.

$\boxed{\texttt{c}}$ Maximum likelihood metoden fungerar inte som tidigare eftersom log-inkrementen ej är oberoende. En modell där ökningarna ej är oberoende ger möjlighet att "titta in i framtiden", dvs. det kan finnas "free lunches".