Tentamen i stokastiska processer den 25/10-2006 fm i V

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 772 3512.

Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM. Tentamensresultatet anslås i MV-huset och meddelas via email till de som skriver sim email-adress tydligt på tentamensomslaget, troligen redan i kväll. Inlämnade svar skall motiveras.

`Uppgift 1.` Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara en svagt stationär process i kontinuerlig tid med väntevärde $\mathbf{E}\{X(t)\}=1$ för $t\in\mathbb{R}$ och kovariansfunktion $r_X(\tau)=\mathbf{Cov}\{X(t),X(t+\tau)\}=1/(1+\tau^2)$ för $\tau\in\mathbb{R}$.

Bestäm med hjälp av ovan givna information de tal $a,b\in\mathbb{R}$ som minimerar $\mathbf{E}\{[X(1)-(aX(0)+b)]^2\}$. (Det gäller alltså att räkna ut $\mathbf{E}\{[X(1)-(aX(0)+b)]^2\}$ som funktion av a och b, och sedan finna de värden för a och b som minimerar det funna funktionen, tex. genom derivering.) **(5 poäng)**

Anmärkning. Om man observerat värdet x_0 för processen $X(t)$ vid tiden $t=0$ (dvs. sett vad dess värde blev vid slumpförsöket), så kan man skatta värdet $X(1)$ för processen vid tiden $t=1$ (om detta ej ännu observerats, och därför är okänt): den linjära funktion $L=aX(0)+b=ax_0+b$ som bäst skattar värdet för $X(1)$, i meningen att det (kvadratiska medel-) skattningsfelet $\mathbf{E}\{[X(1)-L]^2\}$ minimeras, är den som ges av de tal a och b som söks i uppgiften.

`Uppgift 2.` Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara en svagt stationär Gaussisk process i diskret tid med känt väntevärde $\mathbf{E}\{X(t)\}=2$ för $t\in\mathbb{Z}$ och kovariansfunktion $r_X(\tau)=\mathbf{Cov}\{X(t),X(t+\tau)\}$ för $\tau\in\mathbb{Z}$, som är känd på så sätt att man vet motsvarande spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)$ ges av

$$\mathcal{P}_X(f)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}r_X(\tau)\,d\tau=\frac{3}{5-4\cos(2\pi f)}\quad\text{för }\ f\in[-1/2,1/2].$$

Beräkna med hjälp av ovan givna information sannolikheten $\mathbf{P}\{X(-2)+X(2)>2\}$. **(5 poäng)**

Ledning. Det gäller att

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi fk}2^{-|k|}=\frac{3}{5-4\cos(2\pi f)}\quad\text{och}\quad\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{e}^{i2\pi fk}\frac{3}{5-4\cos(2\pi f)}\,df=2^{-|k|}.$$

`Uppgift 3` Låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ vara en standard Wiener process, dvs. en Gaussisk process med väntevärde $\mathbf{E}\{W(t)\}=0$ och kovariansfunktion $r_W(s,t)=\mathbf{Cov}\{W(s),W(t)\}=\min\{s,t\}$. Visa att processen $X(t)=\mathrm{e}^{-t/2}W(\mathrm{e}^t)$, $t\in\mathbb{R}$, är svagt stationär. Förklara även varför $X(t)$ är stationär såväl som Gaussisk. **(5 poäng)**

`Uppgift 4` Till en svagt stationär signal i kontinuerlig tid $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med väntevärde $\mathbf{E}\{S(t)\}=0$ för $t\in\mathbb{R}$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_S(f)$ adderas oberoende svagt stationärt brus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med väntevärde $\mathbf{E}\{N(t)\}=0$ för $t\in\mathbb{R}$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_N(f)$. Den observerade signalen $X(t)=S(t)+N(t)$ filtreras med ett filter vars frekvensfunktion $H(f)$ ger en utsignalen $Y(t)$ som minimerar $\mathbf{E}\{[Y(t)-S(t)]^2\}$.

Det filter som löser ovan beskrivna problem är Wiener-filtret, med frekvensfunktion

$$H(f)=\frac{\mathcal{P}_S(f)}{\mathcal{P}_N(f)+\mathcal{P}_S(f)} \quad \text{för } f\in\mathbb{R}.$$

Visa att så är fallet, dvs. härled Wiener-filtrets frekvensfunktion! **(5 poäng)**

`Uppgift 5` Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara Gaussiskt diskret vitt brus med okänd varians σ^2. Bestäm koefficienten $C_n>0$ så att $\sigma_n^\star = C_n(|e(1)|+\ldots+|e(n)|)$ är en väntevärdesriktig skattning av σ. Beräkna även $\mathbf{Var}\{\sigma_n^\star\}$ och gör med hjälp härav ett approximativt 95% konfidensintervall för σ^2. **(5 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 1)` En Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1 kan beskrivas som ett "halvt hagelbrus"

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty} g\Big(t-\sum_{j=1}^{k}\xi_j\Big) \quad \text{för } t\geq 0,$$

där $\xi_1,\xi_2,\ldots$ är oberoende exp(1)-fördelade stokastiska variabler samt $g(t)=1$ för $t\geq 0$ och $g(t)=0$ för $t<0$.

`a` Förklara påståendet att Poisson-processen är ett halvt hagelbrus. **(1 poäng)**

`b` Hur kan man med hjälp av datorsimuleringar uppskatta sannolikheten $\mathbf{P}\{X(t)-t\geq 4$ för något $t\in[0,10]\}$. **(3 poäng)**

`c` Hur kan man simulera en Poisson-fördelad stokastisk variabel i dator? **(1 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 2)` `a` Hur kan man med hjälp av provtransmissioner uppskatta bitfelssannolikheten för ett digitalt kommunikationssystem. **(2.5 poäng)**

`b` Vad kan tänkas orsaka att den enligt deluppgift a skattade bitfelssannolikheten inte överensstämmer med den teoretsikt beräknade enligt projekt 2? **(1.5 poäng)**

`c` Beräkna variansen $\mathbf{Var}\{X(1)\}$ för en svagt staionär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=1$ för $f\in\mathbb{R}$. **(1 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 3)` `a` Förklara hur man med maximum likelihood-metoden kan skatta värdet av parametern $\lambda>0$ för ett datamaterial $x_1,\ldots,x_n$ av observationer av exp(λ)-fördelade stokastiska variabler $X_1,\ldots,X_n$. **(1.5 poäng)**

`b` Vilken fördelning har den stokastiska variablen $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ då X är en exp(λ)-fördelad stokastisk variabel? **(1.5 poäng)**

`c` Betrakta en prismodell $S(t)=S(0)\,\mathrm{e}^{X(t)-X(0)+\mu t}$ där $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en process som har stationära ökningar som dock ej är oberoende. Diskutera vilka nya svårigheter som uppstår med en sådan modell jämfört situationen projekt 3 där $X(t)$ är en Lévy-process (med oberoende ökningar). Säg något om de praktiskt ekonomiska konsekvenser en sådan modell kan ha jämfört med en modell baserad på Lévyprocesserer. **(2 poäng)**

`Lycka till!`

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 25/10

`Uppgift 1.` Det gäller att $\mathbf{E}\{[X(1)-(aX(0)+b)]^2\} = \mathbf{Var}\{X(1)-(aX(0)+b)\} + (\mathbf{E}\{X(1)-(aX(0)+b)\})^2 = \mathbf{Var}\{X(1)-aX(0)\} + (1-(a\cdot 1+b))^2 = \mathbf{Var}\{X(1)\} + a^2\,\mathbf{Var}\{X(0)\} - 2\,a\,\mathbf{Cov}\{X(0),X(1)\} + (1-a-b)^2 = (1+a^2)r_X(0) - 2\,a\,r_X(1) + (1-a-b)^2 = (1+a^2) - a + (1-a-b)^2$, som minimeras av $a = b = 1/2$.

`Uppgift 2` Eftersom $X(-2)+X(2)$ är $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$-fördelad , så gäller att $\mathbf{P}\{X(-2)+X(2) > 2\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2) > 2\} = 1 - \mathbf{P}\{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \le 2\} = 1 - \Phi((2-\mu)/\sigma)$, som kan slås upp i tabell då man bestämt $\mu = \mathbf{E}\{X(-2)+X(2)\} = 2+2 = 4$ och $\sigma^2 = \mathbf{Var}\{X(-2)+X(2)\} = \mathbf{Var}\{X(-2)\} + \mathbf{Var}\{X(2)\} + 2\,\mathbf{Cov}\{X(-2),X(2)\} = r_X(0) + r_X(0) + 2\,r_X(4) = 1+1+2\,2^{-4} = 17/8$, ty $r_X(\tau) = 2^{-|k|}$ enligt den givna informationen.

`Uppgift 3` Se kapitel 4 och exempel 4.5 i Albins bok.

`Uppgift 4` Se avsnitt 8.6 i Albins bok.

`Uppgift 5` Detta är övning 9.1 i Albins bok. Då $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är Gaussiskt vitt brus med varians σ^2 är $\mathbf{E}\{|e(t)|\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = 2\int_0^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = [-2\,\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}]_0^{\infty} = \sqrt{2/\pi}\,\sigma$, så att $\sigma_n^\star = C_n(|e(1)|+\ldots+|e(n)|)$ har väntevärde $C_n n\sqrt{2/\pi}\,\sigma$, och $\sigma_n^\star$ är en väntevärdesriktig skattning av σ då $C_n = \sqrt{\pi/2}/n$.

Brusvärdena $e(1),\ldots,e(n)$ är oberoende eftersom de är okorrelerade och bruset är Gaussiskt. Därför är $|e(1)|,\ldots,|e(n)|$ oberoende, så att $\mathbf{Var}\{\sigma_n^\star\} = C_n^2\,\mathbf{Var}\{|e(1)|+\ldots+|e(n)|\} = (\sqrt{\pi/2}/n)^2\,n\,\mathbf{Var}\{|e(1)|\} = (\pi/2)\,n^{-1}\,(\mathbf{E}\{|e(1)|^2\} - [\mathbf{E}\{|e(1)|\}]^2) = (\pi/2)\,n^{-1}\,(\sigma^2 - (2/\pi)\sigma^2) = (\pi/2-1)\,\sigma^2/n$, ty $\mathbf{E}\{|e(1)|^2\} = \mathbf{E}\{e(1)^2\} = \mathbf{Var}\{e(1)\} = \sigma^2$, som kan skattas med $(\pi/2-1)\,(\sigma_n^\star)^2/n$. Ett approximativt konfidensintervall för σ ges därför av $\sigma_n^\star \pm \lambda_{0.025}\sqrt{(\pi/2-1)/n}\,\sigma_n^\star$ där $\mathbf{P}\{\mathrm{N}(0,1) > \lambda_{0.025}\} = 0.025$.

`Uppgift 6 (projekt 1)` `a` Se avsnitt 3.3 i Albins bok och projektstencilen.

`b` Enligt en smärre modifiering av lösningen till programmeringsuppgift 1 c.

`c` En $\mathrm{Po}(\lambda)$-fördelad stokastisk variabel erhålles genom att simulera värdet $X(\lambda)$ för en Poisson-process $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ med intensitet 1.

`Uppgift 6 (projekt 2)` `a` Enligt uppgift 4 i projektet.

`b` Bruset är kanske inte normalfördelat, eller så är det inte helt "vitt".

`c` $\mathbf{Var}\{X(1)\} = r_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_X(f)\,df = \infty$.

`Uppgift 6 (projekt 3)` `a` $\frac{d}{d\lambda}\ln(\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)) = \frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^n \ln(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x_i}) = \sum_{i=1}^n(\frac{1}{\lambda} - x_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/\overline{x}$.

`b` $\mathbf{P}\{\mathrm{e}^{-\lambda X} \le x\} = \mathbf{P}\{-\lambda X \le \ln(x)\} = \mathbf{P}\{X \ge -\ln(x)/\lambda\} = 1 - F_X(\ln(x)/\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda(\ln(x)/\lambda)} = x$, så $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ är likformigt fördelad över $[0,1]$.

`c` Maximum likelihood-metoden fungerar inte som tidigare eftersom log-inkrementen ej är oberoende. En modell där ökningarna ej är oberoende ger möjlighet att "titta in i framtiden", dvs. det kan finnas "free lunches".