Tentamen i stokastiska processer den 19/1-2007 em i V

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.

LÄRARE: Patrik Albin 772 3512. JOUR: Rossitza Dodunekova.

Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM. Tentamensresultatet anslås i E-huset och meddelas via email. Inlämnade svar skall motiveras.

`Uppgift 1.` I denna uppgift är $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ en stokastisk process med väntevärde $\mathbf{E}\{X(t)\}=0$ för $t\geq 0$. De n-dimensionella fördelningarna för processen $X(t)$, för något val av $n\in\mathbb{N}$, är fördelningsfunktionerna av typ

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x)=\mathbf{P}\{X(t_1)\leq x_1,\ldots,X(t_n)\leq x_n\} \quad \text{för} \quad x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},\ \ t_1,\ldots,t_n\geq 0.$$

`a` Är kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna, $F_{X(t)}(x)=\mathbf{P}\{X(t)\leq x\}$, tillräcklig för att bestämma $\mathbf{P}\{\max_{t\geq 0} X(t)\leq x\}$ för $x\in\mathbb{R}$? **(1 poäng)**

`b` Är kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna tillräcklig för att avgöra om $X(t)$ är en Poisson process? **(1 poäng)**

`c` Kan, åtminstone ibland, kännedom om de 1-dimensionella fördelningarna vara tillräcklig för att visa att $X(t)$ ej är självsimilär? **(1 poäng)**

`d` Är kännedom om de 2-dimensionella fördelningarna, $F_{X(s),X(t)}(x,y)=\mathbf{P}\{X(s)\leq x, X(t)\leq y\}$, tillräcklig för avgöra om $X(t)$ är bandbegränsat vitt brus? **(1 poäng)**

`e` Är kännedom om de 3-dimensionella fördelningarna, $F_{X(r),X(s),X(t)}(x,y,z)=\mathbf{P}\{X(r)\leq x, X(s)\leq y, X(t)\leq z\}$, tillräcklig för att bestämma om $X(t)$ är svagt stationär? **(1 poäng)**

`Uppgift 2` Bestäm $\mathbf{P}\{X(s)\geq X(t)\}$ för en stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_X(\tau)=\mathbf{Cov}\{X(t),X(t+\tau)\}$ i fallen $r_X(t-s)\neq r_X(0)$ och $r_X(t-s)=r_X(0)$. **(5 poäng)**

`Uppgift 3` `a` Bestäm variansen $V_X(t)=\mathbf{Var}\{X(t)\}$ för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=|f|/(1+f^2)^{3/2}$. **(2.5 poäng)**

`b` Bestäm variansen $V_{X'}(t)=\mathbf{Var}\{X'(t)\}$ för derivatan $X'(t)$ av en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=|f|/(1+f^2)^3$. **(2.5 poäng)**

`Uppgift 4` Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara Gaussiskt diskret vitt brus med okänd varians σ^2. Bestäm koefficienten $\mathcal{D}_n>0$ så att $(\sigma^2)^\star_n=\mathcal{D}_n[e(1)^2+\ldots+e(n)^2]$ blir en väntevärdesriktig skattning av σ^2. Beräkna skattningens varians $\mathbf{Var}\{(\sigma^2)^\star_n\}$ och gör ett approximativt konfidensintervall för σ^2. **(5 poäng)**

`Uppgift 5` Är Hilberttransformen av en deriverbar svagt stationär process deriverbar? **(5 poäng)**

`Uppgift 6.` Diskutera fem distinkta och rimligt substantiella upplevelser, ifrån arbetet med projektet. **(5 poäng)**

`Lycka till!`

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 19/1

`Uppgift 1.` `a` Nej: om tex. $X_1(t)=\xi$ för $t\geq 0$, där ξ är en $\mathrm{N}(0,1)$-fördelad stokastisk variabel (fullständigt beroende process), och för processen $\{X_2(t)\}_{t\geq 0}$ varje processvärde är $\mathrm{N}(0,1)$-fördelat oberoende av varje annat processvärde (fullständigt oberoende process), så har processerna samma 1-dimensionella $\mathrm{N}(0,1)$-fördelningar. Men

$$\mathbf{P}\{\max_{t\geq 0} X_1(t)\leq x\} = \Phi(x) \neq \mathbf{P}\{\max_{t\geq 0} X_2(t)\leq x\} = 0,$$

ty $X_2(t)$ är "fullständigt otyglat" vitt brus, och därmed större än x någonstans.

`b` Nej: tag tex. $X(t)$ $\mathrm{Po}(\lambda t)$-fördelad för $t\geq 0$, med varje processvärde oberoende av varje annat processvärde. Då har $X(t)$ 1-dimensionella fördelningar som en Poisson process, utan att vara en sådan, ty Poisson processer har inte oberoende värden. Alternativt är svaret ja, eftersom Poisson processer ej har väntevärde 0.

`c` Ja, ty om $X(t)$ är självsimilär gäller att

$$F_{X(\lambda t)}(x) = \mathbf{P}\{X(\lambda t)\leq x\} = \mathbf{P}\{\lambda^{\kappa}X(t)\leq x\} = \mathbf{P}\{X(t)\leq \lambda^{-\kappa}x\} = F_{X(t)}(\lambda^{-\kappa}x),$$

så om detta skulle visa sig ej vara uppfyllt är $X(t)$ ej självsimilär.

`d` Ja, ty $X(t)$ är bandbegränsat vitt brus om $r_X(t) = \sigma^2\sin(2\pi f_0 t)/(\pi t)$, och man kan bestämma kovariansfunktionen mha. de 2-dimensionella fördelningarna.

`e` Ja, ty $X(t)$ är svagt stationär om $r_X(t,t+\tau)$ ej beror av t, och man kan bestämma kovariansfunktionen mha. de 2-dimensionella fördelningarna. Dessa kan i sin tur bestämmas mha. de 3-dimensionella fördelningarna

$$F_{X(s),X(t)}(y,z) = \mathbf{P}\{X(s)\leq y, X(t)\leq z\} = F_{X(r),X(s),X(t)}(\infty,y,z).$$

`Uppgift 2` Detta är övning 4.6 i Albins bok: $\mathbf{P}\{X(s)\geq X(t)\} = \mathbf{P}\{X(s)-X(t)\geq 0\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(\mathbf{E}\{X(s)–X(t)\},\mathbf{Var}\{X(s)–X(t)\})\geq 0\} = \mathbf{P}\{\mathrm{N}(0,2(r_X(0)–r_X(t–s))\geq 0\}$, som blir $\frac{1}{2}$ då $r_X(0)\neq r_X(t-s)$ och 1 då $r_X(0)=r_X(t-s)$.

`Uppgift 3` `a` Detta är övning 6.1 i Albins bok: notera att

$$V_X(t) = r_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_X(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f|}{(1+f^2)^{3/2}}\,df = \ldots = 2.$$

`b` Detta är övning 6.2 i Albins bok: se lösningen där.

`Uppgift 4` Detta är övning 9.2 i Albins bok: se lösningen där.

`Uppgift 5` Detta är övning 8.9 i Albins bok: se lösningen där.