TMA421/MSN222 Tentamen i stokastiska processer den 24/8 2007 fm i V

HJÄLPMEDEL: Resultatsammanfattning, beta, och projektstenciler.
LÄRARE: Patrik Albin. JOUR: Johan Tykesson.
Övningstentamen ger bonus vid denna tentamen enligt KursPM. Tentamensresultatet meddelas via email. Inlämnade svar skall motiveras.

`Uppgift 1.` Beräkna korskorrelationsfunktionen $\rho_{Z_1,Z_2}(s,t) = \mathbf{Cov}\{Z_1(s),Z_2(t)\} / \sqrt{\mathbf{Var}\{Z_1(s)\}\,\mathbf{Var}\{Z_1(t)\}}$ för $s,t\geq 0$ mellan $Z_1(t) = X(t)+Y(t)$ och $Z_2(t) = X(t)-Y(t)$ då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är oberoende Poissonprocesser med intensiteter $\lambda_X > 0$ resektive $\lambda_Y > 0$. **(5 poäng)**

`Uppgift 2` Beräkna $\mathbf{P}\{W(2) > W(1)+x\}$ för reella tal x då $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en standard Wienerprocess. **(5 poäng)**

`Uppgift 3` Bestäm kovariansfunktionen r_Y och spektraltätheten $\mathcal{P}_Y$ för utsignalen $\{Y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ från ett filter i diskret tid med impulssvar h_2 och insignal $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, då X i sin tur är utsignal från ett filter i diskret tid med impulssvar h_1 och diskret vitt brus som insignal. **(5 poäng)**

`Uppgift 4` Avgör om funktionen $r(t) = 1-t^2$ för $|t| \leq 1$ och $r(t) = 0$ för $|t| > 1$ är kovariansfunktion för någon svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ i kontinuerlig tid. **(5 poäng)**

`Uppgift 5` Bestäm korsspektraltätheten mellan Hilberttransformen och derivatan av en deriverbar svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ i kontinuerlig tid. **(5 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 1)` En Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1 kan beskrivas som ett "halvt hagelbrus"

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \xi_j\right) \qquad \text{för} \quad t \geq 0,$$

där $\xi_1, \xi_2, \ldots$ är oberoende exp(1)-fördelade stokastiska variabler och $g(t)=1$ för $t\geq 0$ samt $g(t)=0$ för $t<0$.

`a` Förklara påståendet att Poisson-processen är ett halvt hagelbrus. **(1 poäng)**

`b` Hur kan man med hjälp av datorsimuleringar uppskatta sannolikheten

$$\mathbf{P}\{X(t)-t \geq 4 \text{ för något } t\in[0,10]\}. \qquad \textbf{(3 poäng)}$$

`c` Hur kan man simulera en Poisson-fördelad stokastisk variabel i dator? **(1 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 2)` `a` Hur kan man med hjälp av provtransmissioner uppskatta bitfelssannolikheten för ett digitalt kommunikationssystem. **(2.5 poäng)**

`b` Vad kan tänkas orsaka att den enligt deluppgift a skattade bitfelssannolikheten inte överensstämmer med den teoretiskt beräknade enligt projekt 2. **(1.5 poäng)** c Beräkna variansen $\mathbf{Var}\{X(1)\}$ för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ i kontinuerlig tid med spektraltäthet $\mathcal{P}_X(f)=1$ för $f\in\mathbb{R}$. **(1 poäng)**

`Uppgift 6 (projekt 3)` a Förklara hur man med hjälp av maximum likelihood metoden kan skatta värdet av parametern $\lambda > 0$ för ett datamaterial $x_1, \ldots, x_n$ av observationer $X_1, \ldots, X_n$ av en exp(λ)-fördelning. **(1.5 poäng)**

b Vilken fördelning har den stokastiska variablen $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ då X är en exp(λ)-fördelad stokastisk variabel? **(1.5 poäng)**

c Betrakta en prismodell $S(t) = S(0)\,\mathrm{e}^{X(t)-X(0)+\mu t}$ där $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en stokastisk process som har stationära ökningar som dock ej är oberoende. Diskutera vilka nya svårigheter som uppstår med en sådan modell jämfört situationen i projekt 3 där $X(t)$ även har oberoende ökningar. Säg något om de praktiskt ekonomiska konsekvenser en sådan modell kan ha jämfört en model baserad på Lévy-processer (med oberoende stationära ökningar). **(2 poäng)**

`Lycka till!`

Lösningar till tentamen i stokastiska processer den 24/8

$\boxed{\texttt{Uppgift 1}}$ Detta är övning 2.3 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 2}}$ Detta är övning 4.11 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 3}}$ Detta är övning 7.4 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 4}}$ Detta är övning 6.16 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 5}}$ Detta är övning 8.10 i Albins bok: se lösning där.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 1)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Det halva hagelbruset enligt uppgiften ger en process som ökar ett steg i taget med oberoende exp(1)-fördelade tidsmellanrum, vilket är precis hur Poisson processen beter sig!

$\boxed{\texttt{b}}$ Enligt en smärre modifiering av lösningen till programmeringsuppgift 1 c.

$\boxed{\texttt{c}}$ En Po(λ)-fördelad stokastisk variabel erhålles genom att simulera värdet $X(\lambda)$ för en Poisson-process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 2)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ Enligt uppgift 4 i projektet.

$\boxed{\texttt{b}}$ Bruset är kanske inte normalfördelat, eller så är det inte helt "vitt".

$\boxed{\texttt{c}}$ $\mathbf{Var}\{X(1)\} = r_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_X(f)\, df = \infty$.

$\boxed{\texttt{Uppgift 6 (projekt 3)}}$ $\boxed{\texttt{a}}$ $\frac{d}{d\lambda}\ln(\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)) = \frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^n \ln(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x_i}) = \sum_{i=1}^n(\frac{1}{\lambda} - x_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/\overline{x}$.

$\boxed{\texttt{b}}$ $\mathbf{P}\{\mathrm{e}^{-\lambda X} \leq x\} = \mathbf{P}\{-\lambda X \leq \ln(x)\} = \mathbf{P}\{X \geq -\ln(x)/\lambda\} = 1 - F_X(\ln(x)/\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda(\ln(x)/\lambda)} = x$, så $\mathrm{e}^{-\lambda X}$ är likformigt fördelad över $[0,1]$.

$\boxed{\texttt{c}}$ Maximum likelihood metoden fungerar inte som tidigare eftersom log-inkrementen ej är oberoende. En modell där ökningarna ej är oberoende ger möjlighet att "titta in i framtiden", dvs. det kan finnas "free lunches".