2 Modeller för tiden till fel (Failure models)

2.1 Introduktion

Följande fyra viktiga begrepp ska definieras:

- The reliability (survival) function $R(t)$
- The failure rate function $z(t)$
- The mean time to failure (MTTF)
- The mean residual life (MRL)

Sedan ska vi gå igenom några vanliga livslängdsfördelningar.

2.2 Tillståndsvariabel

Komponentens eller systemets *tillståndsvariabel* x definieras utav att

$$x = \begin{cases} 1 & \text{om systemet (komponenten) fungerar} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Den stokastiska process som talar om precis när systemet (komponenten) är i funktion, betecknas $(X(t), t \geq 0)$ och definieras utav att

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{om systemet (komponenten) fungerar kl } t \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Obs att $X(t)$, för varje t, är en stokastisk variabel, samt att när tiden går, så ser vi en realisering $t \mapsto X(t)$ av processen $(X(t), t \geq 0)$. Vi ska tänka oss realiseringen (funktionen) $t \mapsto X(t)$ högerkontinuerlig.

Detta betyder att man kan räkna ut sannolikheter för händelser av typen $X(t) = 1$ eller $X(t) = 1, X(s) = 0$ eller $X(s) = 1 \; \forall s \leq t$. Tänker man sig att systemet är i funktion vid tiden 0, så kan man definiera tiden tills första felet enl

$$T = \inf\{t \geq 0 : X(t) = 0\}$$

och då gäller att

$$T > t \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = 1 \; \forall s \leq t$$

För ett icke-reparerbart system gäller att

$$X(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(s) = 0 \; \forall s \geq t$$

Då gäller att

$$T > t \quad \Leftrightarrow \quad X(t) = 1$$

2.3 Tiden T till fel

Notera först att T:s enhet ej måste vara vanlig kalendertid. Man kan tänka sig att mäta livstid eller livslängd i arbetsdagar (en dag består kanske då av 8 arbetstimmar och står produktinen still under lunch, så står även klockan still) eller körsträcka (om man studerar en enhet i ett fordon).

De modeller vi ska titta på är kontinuerliga även om det inte alltid är fallet i verkligheten.

Sannolikhetstätheten är $f(t)$ definierad för $t \geq 0$ och motsvarande fördelningsfunktion är

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

Obs att

$$f(t) = F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{P(t < T \leq t+h)}{h}$$

För små $\triangle t$ gäller följaktligen

$$P(t < T \leq t + \triangle t) \approx f(t)\, \triangle t$$

2.4 Överlevnadsfunktion

Systemets *överlevnadsfunktionen* eller *funktionssannolikhet* eller *tillförlitlighetsfunktion* är

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(s)\, ds$$

2.5 Felbenägenhet

Betrakta

$$P(T \leq t + \triangle t | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \triangle t)}{P(T > t)}$$

$$\approx \frac{f(t)\,\triangle t}{R(t)} = z(t)\,\triangle t$$

Funktionen

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

kallas för systemets *felbenägenhet* eller *felintensitet* eller *risk*.

Obs att

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \;\Leftrightarrow z(t)R(t) + R'(t) = 0$$

För en given felbenägenhet $z(t)$ är detta är en differentialekvation i $R(t)$. Begynnelsevillkoret är $R(0) = 1$. Lösningen är

$$R(t) = e^{-Z(t)}$$

där

$$Z(t) = \int_0^t z(s)\,ds$$

är den under tidsintervallet $[0, t]$ *ackumulerade risken*.

Således gäller

$$F(t) = 1 - e^{-Z(t)} = 1 - e^{-\int_0^t z(s)\,ds}$$

Medelst derivering fås

$$f(t) = z(t)\,e^{-Z(t)}$$

Ur

$$R(t) = e^{-Z(t)}$$

fås

$$Z(t) = -\log R(t)$$

Deriverar vi detta fås

$$z(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

2.6 Mean time to failure (MTTF)

Väntevärdet

$$\mu = E[T] = \int_0^\infty t f(t)\, dt$$

kallas för MTTF—"mean time to failure"—eller MTBF—"mean time between failures"—beroende på sammanhanget. Man använder även förkortningen MTTR—"mean time to repair". Notera att

$$\text{MTBF} = \text{MTTF} + \text{MTTR}$$

Vid uträkning av MTTF kan ibland följande resultat förenkla:

$$\mu = \int_0^\infty R(t)\, dt$$

Bokens bevis är baserat på partiell integration.

Här är ett alternativt bevis:

$$\int_0^\infty R(t)\, dt = \int_0^\infty \int_t^\infty f(s)\, ds dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^s f(s)\, dt ds = \int_0^\infty s f(s)\, ds = \mu$$

Omkastning av integrationsordning är tillåten då funktionerna är positiva.

Fördelningens *median life* t_m definieras av att $R(t_m) = 0.5$

Fördelningens *mode* är $t_{\text{mode}} = \arg\max_{t \geq 0} f(t)$

Studera själv ex 2.1, där $R(t) = 1/(0.2t+1)^2$. Sökt är $f(t)$, $z(t)$ och MTTF μ.

2.7 Mean residual life (MRL)

Betrakta

$$R(s|t) = P(T > t+s | T > t) = \frac{P(T > t+s)}{P(T > t)} = \frac{R(t+s)}{R(t)}$$

Man brukar definiera

$$\mathrm{MRL}(t) = \mu(t) = \int_0^\infty R(s|t)\,ds$$

Obs $\mu(0) = \mu$.

Medelst derivering av $\mu(t)$ m.a.p t kan man visa att

$$z(t) = \frac{1 + \mu'(t)}{\mu(t)}$$

Rekommendera ex 2.2, där $z(t) = t/(t+1)$. Sökt är $R(s|t)$ och $\mathrm{MRL}(t)$.

2.8 Binomial och geometrisk fördelning

Studeras på egen hand.

2.9 Exponentialfördelningen

Att $T \sim \exp(\lambda)$ innebär att T har tätheten

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{för} \quad t \geq 0$$

Således är tillförlitlighetsfunktionen

$$R(t) = \int_t^\infty f(s)\,ds = e^{-\lambda t}$$

och felbenägenheten

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda$$

Att felbenägenheten är konstant är speciellt för exponentialfördelningen. Det gäller ju att felbenägenheten unikt definierar livslängdsfördelningen.

MTTF för $\exp(\lambda)$ är

$$\mu = E[T] = \frac{1}{\lambda}$$

(utför integrationen eller titta i Beta). Vidare,

$$\mathrm{Var}[T] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exponentialfördelningens s.k *glömskeegenskapen* är

$$R(t|s) = P(T > s + t|T > s) = P(T > t) = R(t)$$

Den visas lätt medelst insättning i h.l av

$$P(T > s + t|T > s) = \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)}$$

Detta gör att en använd enhet hela tiden är "as good as new". Detta är alltså aldrig någon idé att byta ut en komponent med exponentialfördelad livslängd. Det medför också att

$$\mathrm{MRL}(t) = \mathrm{MRL}(0) = \mathrm{MTTF}$$

Exempel 2.4: Låt för $i = 1, 2$, $T_i \sim \exp(\lambda_i)$ och oberoende. Då

$$\begin{aligned} P(T_1 < T_2) &= \int_0^\infty P(T_2 > T_1|T_1 = t) f_{T_1}(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty P(T_2 > t|T_1 = t) f_{T_1}(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty P(T_2 > t) f_{T_1}(t)\, dt = \cdots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

Analogt, om man har n komponenter med oberoende exponentialfördelade livstider med respektive felbenägenheter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så är sannolikheten att komponent j fallerar först lika med

$$P(T_j < T_k \ \forall k \neq j) = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

□

Studera själv blandningar av exponentialfördelningar och s.k fas-typs-fördelningar.

2.10 Poissonprocessen

Låt $\mathcal{A}$ vara en händelse av något slag, t.ex att en radioaktiv atom delar sig och samtidigt utsöndrar en partikel, att ett samtal ankommer till en växel.

Om reparationstiden är försumbar kan vi tänka oss att $\mathcal{A}$ är händelsen att en komponent fallerar.

Vi ska anta nu att tidpunkterna då $\mathcal{A}$ inträffar är fördelade enligt en homogen Poissonprocess (HPP). Detta innebär att

1. $\mathcal{A}$ kan inträffa precis när som helst och sannolikheten att $\mathcal{A}$ inträffar i intervallet $(t, t+h]$ beror ej av t och kan skrivas $\lambda h + o(h)$ då $h \to 0$, där $\lambda > 0$ (obs att $o(h)$ kan vara vilken funktion som helst. Det enda som krävs är att $\lim_{h\to 0} o(h)/h = 0$)

2. sannolikheten att $\mathcal{A}$ inträffar mer än en gång i intervallet $(t, t+h]$ är $o(h)$

3. huruvida $\mathcal{A}$ inträffar eller ej i disjunkta tidsintervall är oberoende händelser

Man kan visa att detta är ekvivalent med att kräva att längden av tiderna mellan det att händelsen $\mathcal{A}$ är $\mathrm{ex}(\lambda)$ och oberoende.

Anta att vi påbörjar studiet av händelsen $\mathcal{A}$ vid tidpunkten $t = 0$ och att vi sedan registrerar tidpunkterna då $\mathcal{A}$ inträffar. Låt $N(t)$ vara antalet gånger $\mathcal{A}$ inträffar i intervallet $(0, t]$.

Att $(N(t), t \geq 0)$ är en homogen Poissonprocess betyder att

1. $N(0) = 0$ och funktionen $t \mapsto N(t)$ är högerkontinuerlig,

och att det finns ett $\lambda > 0$ sådant att

2. för $s < t$ gäller att $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$,

3. för disjunkta tidsintervall $(s_1, t_1], \ldots, (s_k, t_k]$ gäller att ökningarna $N(t_1) - N(s_1), \ldots, N(t_k) - N(s_k)$ är oberoende stokastiska variabler.

Vi noterar att $\lambda = E[N(t)]/t$. Följaktligen brukar man kalla λ för processens *intensitet* ("rate" på engelska).

En naturlig väntevärdesriktig estimator av λ är

$$\hat{\lambda} = \frac{N(t)}{t}$$

Låt $T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$ vara tidpunkterna då $\mathcal{A}$ inträffar. Vi ser att

$$T_k > t \quad \Leftrightarrow \quad N(t) < k$$

Således gäller att

$$R_{T_k}(t) = P(T_k > t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Medelst derivering och teckenbyte får vi T_k:s täthet. Vi avstår ifrån detaljerna och noterar bara att

$$f_{T_k}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Den här fördelningen kallas för *gammafördelningen* och betecknas $\Gamma(k, \lambda)$.

Notera att $\Gamma(1, \lambda) = \mathrm{Exp}(\lambda)$. Tiden tills $\mathcal{A}$ inträffar första gången är alltså exponentialfördelad med parameter λ.

Exempel: Här söks fördelningen för $T_1|(N(t_0) = 1)$. Man antar alltså att exakt en händelse inträffade i tidsintervallet $[0, t_0]$ och är intresserad av när denna händelse inträffade.

Det visar sig att $T_1|(N(t_0) = 1) \sim \mathrm{U}[0, t_0]$. □

Exempel: Antag att fel inträffar i enlighet med en homogen Poissonprocess $(N(t), t \geq 0)$ med intensitet λ. Vissa fel leder till en konsekvens C, medan andra inte gör det. Låt p vara sannolikheten att ett fel leder till en C-konsekvens och antag att händelserna huruvida ett fel leder till en C-konsekvens eller ej är oberoende.

Det visar sig att $(N_C(t), t \geq 0)$ är en homogen Poissonprocess med intensitet $p\lambda$. □

2.11 Gammafördelningen

Studeras på egen hand.

2.12 Weibullfördelningen

T är *Weibullfördelad* med parametrar $\alpha > 0$ och $\lambda > 0$, om T:s täthet är

$$f(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} \quad \text{för} \quad t \geq 0$$

Parametern α definierar fördelningens form och $1/\lambda$ är dess skala. Överlevnadsfunktion fås medelst integration till

$$R(t) = e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

Således blir felbenägenheten

$$z(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}$$

Resten av avsnittet studeras på egen hand.

Studera speciellt exempel 2.10, där man tittar på s.k seriesystem av komponenter med Weibullfördelade livstider.

Obs att ett *seriesystems livstid* T definieras av att

$$T = \min_i T_i$$

och att ett *parallellsystems livstid* T definieras av att

$$T = \max_i T_i$$

där T_i betecknar livstiderna hos de ingående komponenterna.

2.13 Normalfördelningen

Observera att bokens beteckning är $\mathrm{N}(\nu, \tau^2)$.

Läs själva om normalfördelningen i grundkursboken.

Viktigt att komma ihåg att

$$X \sim \mathrm{N}(\nu, \tau^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{X-\nu}{\tau} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

samt att $\mathrm{N}(0,1)$-fördelningens täthet är

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$$

och att motsv fördelningsfunktion betecknas $\Phi(t)$.

Obs att N(0, 1)-fördelningen lever på hela talaxeln, så att om $P(T < 0)$ ej är försumbart liten, måste man betinga med att $T \geq 0$. Överlevnadsfunktion blir då

$$R(t) = P(T > t | T \geq 0) = \frac{P(T > t)}{P(T \geq 0)}$$
$$= \frac{1 - \Phi((t-\nu)/\tau)}{1 - \Phi(-\nu/\tau)} = \frac{\Phi((\nu - t)/\tau)}{\Phi(\nu/\tau)}$$

Utifrån detta uttryck kan man nu beräkna fördelningsfunktion $F(t)$, täthet $f(t)$ och felbenägenhet $z(t)$.

2.14 Lognormalfördelningen

T är lognormalfördelad om $Y = \ln T$ är normalfördelad.

Lognormalfördelningen är ofta en bra modell för en komponents reparationstid.

Studera på egen hand det viktiga exempel 2.13 om materialutmattning. Det ingår i kraven för kursen att veta vad ett Wöhler- eller $s - N$-diagram är.

2.15 Birnbaum-Saunders fördelning

2.16 Inverse normalfördelning

2.17 Extremvärdesfördelningarna

2.18 Stressberoende modellering

2.19 Familjer av livslängdsfördelningar

IFR, DFR

IFR betyder ”increasing failure rate”.

DFR betyder ”decresing failure rate”.