TMS026/MSN310 Statistisk tillförlitlighetsteori, 5 p

Tentamen 18 oktober 2005 fm V

Skrivningstiden är 5 timmar.

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa, Beta, kursens formelsamling samt ett eget handskrivet A4-ark med anteckningar. De som inte har tillgång till Beta får lov att ta med sig 7 st formelblad kopierade ut Beta, som finns att hämta på kursens hemsida.

Examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 79 42 09.

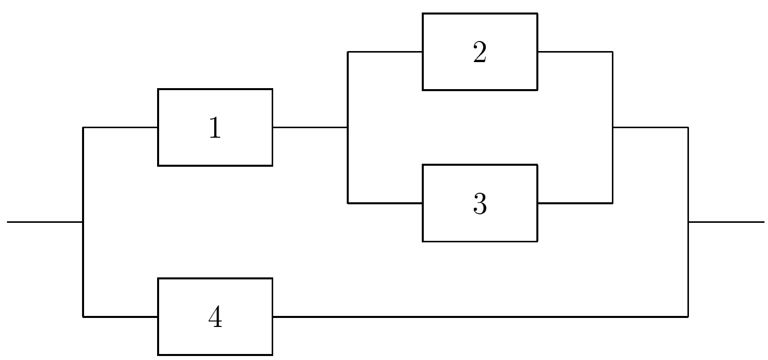
Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a (Chalmers) eller 21 för VG (GU). Lösningar går att ladda ner från kurshemsidan. Rättningsprotokoll anslås i första våningen i Matematisk centrum, Eklandagatan 86. Granskning av tentan kan under terminstid göras i mottagningsrummet på entréplanet (våning 2) i Matematisk centrum må-fr 12^{30}–13.

Svar skall motiveras om ej annat sägs i uppgiften.

Uppgifter

1. Låt T_1 vara tiden till första impulsen i en homogen Poissonprocess (HPP) med intensitet λ. Visa att $T_1 \mid N(1) = 1 \sim \mathrm{U}(0,1)$, d.v.s att den betingade fördelningen för T_1 givet att $N(1) = 1$ är $\mathrm{U}(0,1)$. (5 p)

2. Betrakta tillförlitlighetsstrukturen



Antag att alla komponenterna har samma tillförlitlighet p och att de fungerar oberoende av varandra. Beräkna strukturens tillförlitlighet p_S. (5 p)

3. För en struktur bestående av tre komponenter kallade 1, 2 och 3, gäller att $P(X_i = 1) = pq$, $P(X_i = X_j = 1) = p^2q$ för $i \neq j$ och $P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) = p^3q$, där $q < 1$.

   (a) Är X_1, X_2, X_3 oberoende? (1 p)

   Antag att strukturen är en s.k 2-utav-3-struktur. Låt $X = 1$ då strukturen är uppe och låt $X = 0$ annars.

   (b) Beräkna $P(X = 1)$. (4 p)

4. Betrakta en ”stand-by”-struktur bestående av två komponenter A och B, båda med konstant felbenägenhet λ. Antag att deras resp reparationstider är exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$. Antag dessutom att alla upp- och nertider är oberoende. Vid start är komponent A fungerande och aktiv, medan komponent B är fungerande och stand-by. Då en komponent går ner kopplas automatiskt den andra komponenten in såvida den inte är under reparation. I så fall går strukturen ner. Då båda komponenterna är nere och under reparation är strukturen nere och den går upp så fort en av komponenterna blir färdigreparerad. Så varje komponent är alltid i ett av följande tre tillstånd: uppe och aktiv, uppe och stand-by, samt nere och under reparation. Låt $X(t) = 1$ då strukturen är uppe och låt $X(t) = 0$ annars. Beräkna

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = 1) \qquad \text{(5 p)}$$

5. Här nedan presenteras en datamängd över ett systems 7 första feltider. Systemet arbetar dygnet runt och då det går ner repareras det mycket snabbt. Vi ska därför antaga att reparationstiderna är försumbara. Vi ska också antaga att tiderna mellan fel är oberoende. Tidsenhet är dygn.

Fel nr j	Tidpunkt för fel S_j	Tid till föregående fel T_j
0	0	0
1	177	177
2	242	65
3	293	51
4	336	43
5	368	32
6	395	27
7	410	15

Som du ser tenderar tiderna mellan fel att bli kortare allt eftersom. Undersök med ett lämpligt test om denna negativa trend är statistiskt säkerställd på nivån 1%. (5 p)

6. Antag att du i n oberoende försök som startades samtidigt har observerat r livslängder $t_{(1)} \leq \cdots \leq t_{(r)}$ under tiden t_0 tidsenheter. Om de övriga $n - r$ vet du endast att de är större än t_0. Som teoretisk modell för detta försök väljer du fördelningen, vars felbenägenhet är

$$z(t) = \alpha\beta\, t^{\beta-1} \quad \text{för} \quad t > 0$$

där $\alpha, \beta > 0$. Skriv upp den s.k trolighetsfunktionen, här benämnd $L(\alpha, \beta)$, logaritmera, d.v.s bilda $\mathcal{L}(\alpha, \beta) = \ln L(\alpha, \beta)$ och förenkla så långt som möjligt. Använd gärna beteckningar införda i avsnittet om ”total time on test.” (Obs att du skall alltså endast formulera maximeringsproblemet. Du behöver inte lösa det. En numerisk lösning för givna $t_1, \ldots, t_n$ och r hittar man ju lätt med t.ex MATLAB.)(5 p)

Lycka till!

1. Vi får att den betingade fördelningsfunktionen är

$$\begin{aligned} P(T_1 \le t \mid N(1) = 1) &= \frac{P(N(t) = 1, N(1) - N(t) = 0)}{P(N(1) = 1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}\,\lambda t \cdot e^{-\lambda(1-t)}}{e^{-\lambda}\,\lambda} = t \end{aligned}$$

för $0 < t < 1$. Motsv täthet är konstant och lika med 1 då $0 < t < 1$. Således är T_1 under den givna betingelsen U$(0, 1)$-fördelad.

2. Den översta grenen har strukturfunktionen

$$x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3)$$

(Denna struktur har vi ju stött på flera gånger i kursen.) Enl regeln för parallellkoppling av komponenter fås nu att

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3) + x_4 - x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3)x_4 \\ &= x_4 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

Vi ser nu att

$$p_S = p + 2p^2 - 3p^3 + p^4$$

3. (a) Komponenterna är beroende, eftersom

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = (pq)^2 = p^2q^2 \ne p^2q = P(X_1 = 1, X_2 = 1)$$

(Ty $p^2q^2 = p^2q$ endast om $q = 1$.)

(b) Vi får

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \\ &\quad + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\ &= 3(p^2q - p^3q) + p^3q \\ &= (3 - 2p)p^2q \end{aligned}$$

4. Låt a, s och d beteckna att en komponent är aktiv, i stand-by-läge och nere (d.v.s under reparation). Numrera de möjliga tillstånden dd, da, ad, sa, as från 1 t.o.m 5, där den första bokstaven betecknar komponent A:s tillstånd och den andra komponent B:s. De möjliga övergångarna och deras intensiteter ges av följande tabell:

Från	as	sa	ad	ad	da	da	dd	dd
Till	da	ad	as	dd	sa	dd	ad	da
Intensitet	λ	λ	μ	λ	μ	λ	μ	μ

Motsvarande intensitetsmatris blir

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

och löser vi ekvationssystemet $\boldsymbol{P}\mathbb{A} = \mathbf{0}$ för en sannolikhetsvektor $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_5 \end{bmatrix}$, erhålles $P_1 = \lambda^2/c$, $P_2 + P_3 = 2\mu\lambda/c$ och $P_4 + P_5 = 2\mu^2/c$, där $c = \lambda^2 + 2\mu\lambda + 2\mu^2$. Det sökta gränsvärdet är således

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = 1) = 1 - P_1 = \frac{2\mu\lambda + 2\mu^2}{\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2\mu^2}$$

Notera att uppgiften också kan lösas genom att man innför tillstånden $0, 1, 2$, där siffrran betecknar antalet komponenter som är uppe. Detta är förmodligen enklare.

5. Testet jag tänkte mig ska användas är antingen Laplace-testet eller ”Military Handbook Test”. Det senare har ni redan analyserat denna datamängd med i övning 7.12. Så jag löser uppgiften här med Laplace-testet. Eftersom vi har data t.o.m det 7:e felet, beräknar vi

$$U = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} S_j - S_n/2}{S_n/\sqrt{12(n-1)}} = 2.00$$

En titt i tabell över normalfördelningen ger att utfallets P-värde är $P(Z > 2.00) = 0.0228 > 0.01$. Den negativa trenden är alltså inte statistiskt säkerställd på nivån 1%. Teststatistikan i ”Military Handbook”-testet har värdet 4.095 och går man i en χ^2-tabell in på 12 frihetsgrader, ser man att P-värdet ligger mellan 1% och 2.5% (det exakta värdet är 1.8%). Trenden är alltså inte heller statistiskt säkerställd med detta test.

6. Trolighetsfunktionen (”likelihooden”) blir

$$L(\alpha,\beta) = \binom{n}{r} r! \left(\prod_{i=1}^{r} f(t_{(i)}|\alpha,\beta)\right)(1 - F(t_0|\alpha,\beta))^{n-r}$$

där

$$f(t|\alpha,\beta) = z(t)e^{-Z(t)} \quad \text{och} \quad F(t|\alpha,\beta) = 1 - e^{-Z(t)}$$

för $t > 0$. Här är $Z(t) = \int_0^t z(z)\,ds = \alpha t^\beta$ (den med gott minne ser direkt att $z(t)$ är felbenägenheten i Weibull-fördelningen). Vi får, modulo irrelevanta faktorer, att

$$\begin{aligned} L(\alpha,\beta) &\propto \left(\prod_{i=1}^{r} \alpha\beta t_{(i)}^{\beta-1} e^{-\alpha t_{(i)}^{\beta}}\right)\left(e^{-\alpha t_0^\beta}\right)^{n-r} \\ &\propto \alpha^r\beta^r \left(\prod_{i=1}^{r} t_{(i)}\right)^{\beta-1} e^{-\alpha\left(\sum_{i=1}^{r} t_{(i)}^{\beta} + (n-r)t_0^\beta\right)} \end{aligned}$$

vilket medför att den sökta log-troligheten (så när som på additiva ointressanta konstanter) är

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta) = r\ln\alpha + r\ln\beta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{r}\ln t_{(i)} - \alpha\left(\sum_{i=1}^{r} t_{(i)}^{\beta} + (n-r)t_0^\beta\right)$$

Problemtexten var kanske aningen missledande, ty det är bara då $\beta = 1$ som beteckningar från avsnittet om TTT kommer till användning.

Av 14 tentander godkändes 11, varav 7 med högre betyg än G resp 3:a.