I figuren nedan visas en simulering av bivariata normalfördelade data x, y med väntevärden

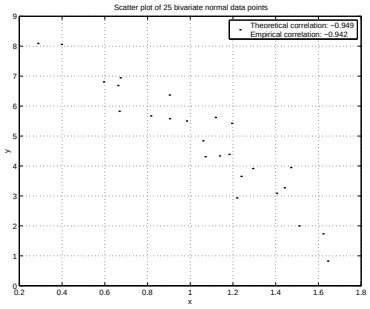
$$\mu_x = 1, \quad \mu_y = 5$$

och standardavvikelser

$$\sigma_x = 0.3, \quad \sigma_y = 1.58$$

samt kovariansen

$$\mathrm{cov}_{xy} = -0.45$$



Figur 1: En s k skatter-plott med simulerade bivariata data med stark negativ korrelation.

Definition 1 (s 106) Pearsons *korrelationskoefficient* är

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}}$$

där

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \textstyle\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \\ S_{yy} &= \textstyle\sum_i (y_i - \bar{y})^2 \\ S_{xy} &= \textstyle\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \end{aligned}$$

Observera att

1. r beror ej av sorten
2. r är symmetrisk i x och y
3. $-1 \leq r \leq 1$
4. r^2 är ett mått på graden av linjärt samband
5. $r^2 = 1 \Leftrightarrow$ punkterna ligger på en rät linje

Definition 2a (s 144) En bivariat massfunktion $p(x, y)$ ska uppfylla

1. $p(x, y) \geq 0 \; \forall x, y$
2. $\sum_{x,y} p(x, y) = 1$

Definition 2b En bivariat täthet $f(x, y)$ ska uppfylla

1. $f(x, y) \geq 0 \; \forall x, y$
2. $\int_R \int_R f(x, y)\, dy dx = 1$

Teoretiska proportioner (sannolikheter) beräknas medelst summering i det diskreta fallet och integrering i det kontinuerliga fallet. (Analogt med den univariata (en-dimensionella) teorin).

Exempel 3.19 (s 144-145) A certain market has both an express checkout register and a superexpress register. Let x denote the number of customers queueing at the express register at a particular weekday time and let y denote the number of customers in the line at the superexpress register at that same time. The joint probability mass function $p(x, y)$ is given in the following table.

		y			
		0	1	2	3
	0	.08	.07	.04	.00
	1	.06	.15	.05	.04
x	2	.05	.04	.10	.06
	3	.00	.01	.05	.06
	4	.00	.01	.05	.06

Kalla motsvarande stokastiska variabler för X och Y. Då

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Beräkna

1. $P(X = Y)$
2. $P(X + Y = 2)$
3. $p_X(1) = P(X = 1)$

Allmänt gäller i det diskreta fallet att de s k marginalfördelningarna (d.v.s fördelningarna för marginalerna X resp Y) definieras och beräknas enligt

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y p(x, y)$$

samt

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x p(x, y)$$

där $p(x, y)$ är den bivariata (två-dimensionella) massfunktionen.

I det kontinuerliga fallet gäller analogt

$$f_X(x) = \int_R f(x, y)\, dy$$

och

$$f_Y(y) = \int_R f(x, y)\, dx$$

där $f(x, y)$ är den bivariata (två-dimensionella) tätheten.

Definition 3 (s 146) Kovariansen mellan x och y är i det kontinuerliga fallet

$$\text{cov}_{xy} = \int_R\int_R (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y)\, dydx$$

Den normerade kovariansen

$$\rho = \frac{\text{cov}_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

kallas för *korrelationskoefficienten*.

Korrelationskoefficienten ρ är den teoretiska motsvarigheten till Pearsons korrelationskoefficient r och den uppfyller liknande egenskaper.

Notera att

$$\begin{aligned}
\text{cov}_{xy} &= \int_R\int_R (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y)\, dydx \\
&= \int_R\int_R (xy - \mu_x y - x\mu_y + \mu_x\mu_y)\, f(x, y)\, dydx \\
&= \int_R\int_R xy f(x, y)\, dydx - \mu_x\mu_y \\
&= \mu_{xy} - \mu_x\mu_y
\end{aligned}$$

Produkten xy är ju en variabel om x och y är det. Man kan visa att

$$\mu_{xy} = \int_R\int_R xy f(x, y)\, dydx$$

Rent allmänt gäller att bokens beteckningar är dåliga. Bäst är att hela tiden införa stokastiska variabler och beteckna dem med stora bokstäver X, Y, Z, etc. Istället för cov_{xy} skriver vi $\text{Cov}[X, Y]$ och vi noterar att dubbelintegralen ovan är ett väntevärde. Vi kan då skriva

$$\text{Cov}[X, Y] = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$

Bra att känna till, men inget som vi ska gå närmare inpå i denna kurs är att väntevärdet är en linjär operator. Detta innebär att följande kalkyl är matematiskt korrekt:

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}[X, Y] = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right] \\
&= E\left[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X] \cdot E[Y]\right] \\
&= E[XY] - E[Y] \cdot E[X] - E[X] \cdot E[Y] + E\left[E[X] \cdot E[Y]\right] \\
&= E[XY] - E[X] \cdot E[Y]
\end{aligned}$$

Jämför med uträkningen av cov_{xy} på OH 6.

Vi ser också att

$$\text{Cov}[X, X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = \text{Var}[X]$$

Exempel 1 (s 146-147) Bivariata normalfördelningen är det kanske viktigaste exemplet på en flerdimensionell fördelning:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - \rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

För parametern ρ gäller att $-1 < \rho < 1$, och man kan visa att om X och Y är bivariat normala med fördelning enl ovan, så är deras korrelationskoefficient lika med ρ.

Den bivariata normalfördelningen kan betecknas

$$\text{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$$

Korrelationskoefficienten ρ är ett mått på sambandet mellan X och Y. Notera att om $\rho = 0$, så faktoriseras $f(x, y)$ i två univariata tätheter, enligt

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - \rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \\
&= f_1(x) f_2(y)
\end{aligned}$$

Man inser att $f_1(x)$ måste vara X:s täthet och analogt att $f_2(y)$ är Y:s täthet.

Tillbaka till den allmänna teorin.

Ett viktigt specialfall uppkommer då täthets- eller massfunktionen kan faktoriseras i en faktor som bara innehåller x och en annan som bara innehåller y:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$
$$p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$$

Detta är fallet då variablerna ej har något samband. Man säger då att de är *oberoende*.

Antag att vi studerar två variabler x och y med bivariat täthetsfunktion $f(x,y)$ och har fått reda på utfallet av den ena, säg x. Låt X och Y vara motsvarande stokastiska variabler. Känt är att $X = x$. Om variablerna är oberoende, så säger detta inget om Y:s utfall. Men om X och Y är beroende, så finns det information om Y:s utfall i faktumet att X fick utfallet x.

Om vi inte utnyttjar kunskapen att $X = x$ inträffat, så är Y:s marginalfördelning lika med

$$f_Y(y) = \int_R f(x,y)\,dx$$

enlig vad vi tidigare sagt. Se OH 5.

Om vi utnyttjar att $X = x$, så kan man räkna ut Y:s betingade täthet, givet att $X = x$, så här:

$$f_{Y|X=x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Kolla själva att oberoende innebär att den betingade tätheten ej beror av x och att då är

$$f_{Y|X=x}(y|x) = f_Y(y)$$

Antag att vi i n st mätningar av variabeln x har erhållit observationerna

$$x_1, \ldots, x_n$$

För att den statistiska analysen ska bli bra är det viktigt att observationerna är

- oberoende
- likafördelade

Oberoende betyder att resultatet från ett av försöken ej får lov att påverka något annat.

Likafördelade betyder helt enkelt att man observerar samma variabel x. På engelska uttrycker man ofta detta genom att säga att observationerna är från samma *population*.

Observera att n-tippeln $x_1, \ldots, x_n$ i sig själv är en variabel, som kan observeras genom att vi upprepade (säg m) gånger observerar $x_1, \ldots, x_n$:

försök nr	observationer
1	$x_{11}, \ldots, x_{1n}$
2	$x_{21}, \ldots, x_{2n}$
$\vdots$	
m	$x_{m1}, \ldots, x_{mn}$

Så vi kan tänka oss att $x_1, \ldots, x_n$ har en (multivariat) täthet eller massfunktion $f(x_1, \ldots, x_n)$. Att $x_1, \ldots, x_n$ är oberoende betyder helt enkelt då att

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

där $f_i(x_i)$ är den (marginal-) täthet eller massfunktion som beskriver x_i:s fördelning. Att de är likafördelade betyder att

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x)$$

och att de har samma fördelning som x betyder att

$$f_i(x) = f(x) \quad \text{för} \quad i = 1, \ldots, n$$

Således gäller om $x_1, \ldots, x_n$ är oberoende och likafördelade observationer av variabeln x, att den multivariata tätheten som beskriver utfallen av n-tippeln $x_1, \ldots, x_n$ är lika med produkten av de univariata, d.v.s.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

De statistiska analysmetoder vi ska lära oss förutsätter oberoende och likafördelade observationer. När man har sådana säger man ofta att det är ett (slumpmässigt) *stickprov* ("random sample" på engelska).

Antag nu att de n observationerna $x_1, \ldots, x_n$ är oberoende och likafördelade mätningar av någon fysikalisk storhet θ. Kalla variabeln vi mäter för x och låt μ_x resp. σ_x vara x:s väntevärde och standardavvikelse.

Definition 4 (s 173) Mätmetoden säges vara mer eller mindre *noggrann* ("accurate") beroende på hur stor differensen $\theta - \mu_x$ är. Maximal noggranhet har vi då $\theta = \mu_x$. Vi säger då att metoden är *väntevärdesriktig* ("unbiased").

Definition 5 (s 174) Mätmetoden säges vara mer eller mindre *precis* ("precise") beroende på hur stor standardavvikelsen σ_x är. Ju mindre σ_x är, desto precisare är mätmetoden.

Nyckelord i kursdelen

Pearsons korrelationskoefficient

Bivariata tätheter och massfunktioner

Marginaltätheter och -massfunktioner

Kovarians och korrelation

Bivariat normalfördelning $\mathrm{N}(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2, \rho)$

Oberoende variabler

Betingade massfunktioner och tätheter

Oberoende och likafördelade mätningar

Väntevärdesriktighet