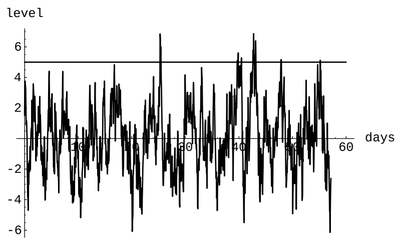
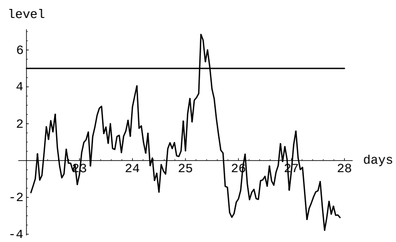
Belastningen av en teknisk konstruktion



Belastningen expanderad för dagarna 22 till 28



Då belastningen går över nivån 5.0 inträder ett kritiskt tillstånd

Risken att konstruktionen havererar är då förhöjd

Poissonprocessen

Vi studerar konstruktionens last under ett år (= 365 dygn)

Tänk dig att vi varje dag kl 12:00 gör försöket att observera huruvida lastprocessen någon gång under det senaste dygnet har korsat kritiska nivån på väg uppåt

Låt p_d vara sannolikheten att detta ska inträffa

Låt N^d vara antalet dygn med minst en uppåtkorsning

Om kritiska nivån är hög (vilket vi antar), så gäller approximativt

$$N^d \sim \mathrm{bin}(n_d, p_d)$$

där $n_d = 365$

Nu ökar vi upplösningen och noterar varje hel timma huruvida lasten under de senaste 60 minuterna har korsat kritiska nivån på väg uppåt

Låt p_h vara sannolikheten att detta ska inträffa

Låt N^h vara antalet hela timmar med minst en uppåtkorsning

Då gäller approximativt att

$$N^h \sim \mathrm{bin}(n_h, p_h)$$

där $n_h = 24n_d = 8760$

Nu ökar vi upplösningen ytterligare och noterar varje hel munut huruvida lasten under den senaste minuten har korsat kritiska nivån på väg uppåt

Låt p_m vara sannolikheten att detta ska inträffa

Låt N^m vara antalet hela minuter med minst en uppåtkorsning

Då gäller approximativt att

$$N^m \sim \mathrm{bin}(n_m, p_m)$$

där $n_m = 60n_h = 525\,600$

Etc

I gräns då upplösningen blir oändligt fin gäller för många förekommande lastprocesser att antalet uppåtkorsningar N är Poissonfördelat, ty

$$\mathrm{bin}(n, p) \approx \mathrm{Poi}(np)$$

då n är stort och p är litet

Det är praktiskt här att som parameter välja 365λ, för då blir λ:s enhet uppåtkorsningar/dygn

Vi har alltså att $N \sim \mathrm{Poi}(365\lambda)$

Låt nu för $t \geq 0$, N_t vara antalet gånger den kritiska nivån överskrids (uppåtkorsas) under tiden från årets start och t dygn framåt.

Obs att t ej behöver vara ett heltal. Vi arbetar ju nu i kontinuerlig tid.

Vi behöver inte heller förutsätta att $t \leq 365$. Vi kan ju i teorin studera lastprocessen hur länge som helst.

Av diskussionen tidigare förstår vi att antagandet $N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$ är rimligt och att det dessutom är rimligt att differensen $N_s - N_t$, som ger oss antalet lastöverskridanden i tidsintervallet $(t, s]$, är oberoende av N_t och Poissonfördelad med parameter $\lambda(s-t)$. Här tänker jag mig att $t < s$.

Detta är *Poissonprocessens* definierande egenskaper. En händelse i en Poissonprocess kallas ofta för *impuls*.

Vad man ska komma ihåg om Poissonprocessen, är att antalet impulser i disjunkta tidsintervall är oberoende Poissonvariabler med parametrar proportionella mot tidsintervallens längder.

λ brukar kallas Poissonprocessens *intensitet*.λ:s enhet är impulser per tidsenhet.

I en Poissonprocess är tiderna mellan impulserna oberoende och Exp(λ)-fördelade. Den minnesgode kanske kommer ihåg att vi, under en föreläsning, räknade ut att för Exp(λ)-fördelningen är felintensiteten $h(t) = f(t)/R(t) = \lambda$.

Poissonprocessen är många gånger en bra modell för när i tiden ovanliga händelser inträffar.

Den är också ofta en vettig modell för när olika kontinuerliga processer överskrider (uppåtkorsar) (väldigt) höga nivåer.

Kom ihåg att modifieringar måste göras om den kontinuerliga processen uppvisar säsongsvariationer.

För belastningsprocessen vi studerar är nivån 5 en varningsnivå. Vi ska säga att vi har ett tillbud (larm) då lasten går över detta värde.

Katastrof blir det om lasten fortsätter upp över nivån 6.75.

Vi betecknar tillbud med T och katastrof med K. Låt $p = P(K|T)$.

Om tillbudsprocessen är en Poissonprocess med intensitet λ, så blir katastrofprocessen också en Poissonprocess, men nu med intensiteten $p\lambda = P(K|T)\,\lambda$.

Detta är ju väldigt naturligt, eftersom $100p\%$ av tillbuden i det långa loppet utvecklas till katastrofer och katastrofer är ännu ovanligare än tillbud.

Innan vi går vidare noterar vi att processen var över kritiska nivån sammanlagt 8 gånger under 56 dygn och 4 timmar, vilket ger oss trolighetsskattningen

$$\hat{\lambda} = \frac{8}{56 + 4/24} \approx 0.142$$

av λ

Peaks Over Threshold (POT)

Vi betraktar varje överskridande av kritiska nivån för sig. Betrakta ett godtyckligt sådant och låt X vara maximala nivån under överskridandet.

Det finns teoretiska skäl för ansatsen att X:s täthet är

$$f(x|T) = \frac{\alpha - 1}{5}\left(\frac{x}{5}\right)^{-\alpha} \quad \text{för} \quad x \geq 5$$

Detta är Paretofördelningens täthet (obs att $\alpha > 1$).

Medelst integration fås

$$P(X > x|T) = \int_x^\infty f(y|T)\,dy = \left(\frac{x}{5}\right)^{1-\alpha} \quad \text{för} \quad x \geq 5$$

T.ex

$$p = P(K|T) = P(X > 6.75|T) = 1.35^{-\alpha}$$

Tanken är nu att genom att studera maximala värdet i alla överskridanden, kan vi skaffa oss en trolighetsskattning $\hat{\alpha}$ av α, som vi kan använda till att skatta p enl

$$\hat{p} = 1.35^{-\hat{\alpha}}$$

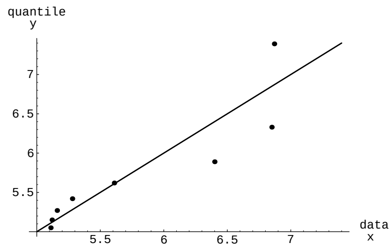
Jag erhöll

$$\hat{\alpha} \approx 8.105$$

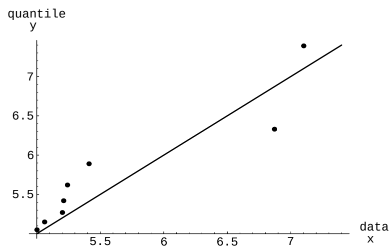
$$\hat{p} \approx 0.119$$

Detaljer finns i häftet.

Kvantil-plot av anpassningen av överskridandedata till Paretofördelningen



Kvantil-plot av simulerade överskridandedata



Detaljer finns i häftet.

Återkomstnivåer

Vi ska studera nivåer i lastprocessen som i genomsnitt ej återkommer oftare än ca $1/\lambda \approx 1/0.142 \approx 7$ dygn.

Hur ofta återkommer katastrofnivån 6.75?

Svar: $\dfrac{1}{p\lambda} \approx \dfrac{1}{\hat{p}\hat{\lambda}} \approx 59$ dygn

Den s.k 100-*dygnsnivån* x_{100} är den nivå som i genomsnitt överskrides en gång på 100 dygn.

Den definieras av att

$$\lambda P(X > x_{100}|T) = \frac{1}{100}$$

Insättning av

$$P(X > x_{100}|T) = \left(\frac{x_{100}}{5}\right)^{1-\alpha}$$

ger

$$x_{100} = 5\,(100\lambda)^{1/(\alpha-1)}$$

Insättning av skattade värden ger

$$\hat{x}_{100} \approx 7.27$$