Tommy Norberg
Matematisk statistik
Chalmers & GU
2 mars 2005

Något om riskkostnader

I vetenskapliga såväl som i vardagliga sammanhang används ordet ”risk” på flera sätt. Ordet förknippas t.ex ofta med chansen (sannolikheten) att något obehagligt inträffar. Häromåret orsakade ett forskningsteam stor uppståndelse, då de menade att risken en fotgängare tar då han/hon ska korsa en gata, är förhöjd vid markerade övergångsställen. Förklaringen skulle kunna vara att fotgängare vid övergångsställen har en större benägenhet att slarva med uppsikten över bil- och cykeltrafiken. Fast man tycker ju att detta mer än väl borde kompenseras av ökad uppmärksamhet hos bilförare vid övergångsställen. Medicinare talar ofta om förhöjd risk för individer med ett visst beteende. Rökare har t.ex högre risk att få vissa typer av cancersjukdomar. Feta har större risk än normalviktiga att få åldersdiabetes. Etc.

I tekniska sammanhang har ordet risk mer och mer kommit att förknippas med en förväntad eller skattad framtida kostnad. Skälet till detta är bl.a att om man ska jämföra olika typer av möjliga olyckor, så är det inte bara deras resp sannolikheter som är av intresse utan också deras konsekvenser. De senare försöker man då uppskatta kostnaden för. Detta är, som var och en förstår, ingen lätt uppgift.

Det är viktigt att vänja sig vid att ordet risk har flera betydelser. Av praktiska såväl som pedagogiska skäl kommer jag att använda ordet risk i flera betydelser nedan. Det är viktigt att läsaren övar sig i att förstå ordet rätt.

Vi ska i våra tekniska tolkningar av ordet risk, alltså också se till konsekvenskostnaden. Vi ska börja med den enklaste tolkningen av risk.

Man måste också komma ihåg att de siffror som ingår i riskkalkyler ofta är mer eller mindre grova uppskattningar, alternativt uträknade eller framsimulerade i någon matematisk eller matematisk statistisk modell med (ibland stor) osäkerhet. En osäkerhetsanalys behöver alltså bifogas många riskanalyser. Detta görs inte alltid. Vi kan inte i detta häfte ge osäkerheten i analyserna tillräcklig uppmärksamhet.

Vi ska införa begreppet risk genom att analysera en tänkt beslutssituation. Ett samhälle tar sitt dricksvatten ur ett vattendrag. Uppströms samhället ligger en kemisk industri. Man bedömmer att om inga åtgärder vidtas kommer man att få ett tungmetallutsläpp som når vattenverkets vattenintaget i snitt ca 1 gång på 10 år. Samhällets totala kostnad för att sanera vattenverket om ett sådant utsläpp skulle ske bedöms bli ca 15 Mkr (miljoner kr). Hela kostnaden för att sanera vattenverket är ca 30 Mkr, men den som är skyldig till föroreningen måste ta halva kostnaden enl gällande lag. Samhällets förväntade kostnad är ca $15 \cdot 1/10 = 1.5$ Mkr/år. Detta är den årliga ekonomiska risk samhället tar om inga åtgärder för att förbättra situationen vidtas.

Man brukar definiera *risken* eller, snarare, *riskkostnaden* R som $C_F P_F$, där P_F är sannolikheten för ”failure”, som man ofta säger, och C_F är den kostnad man får om failure F inträffar.

Övning 1) I en miljökonsekvens-analys av en existerande industrianläggning, har man bedömt att risken att en viss tungmetall-förorening når en närliggande vattentäkt till ca 1 på 1 000. Man vet att om tungmetall påträffas i täkten, så kommer folkopinionen att medföra att den inte utan åtgärd kan användas, även om halten tungmetall är klart under gränsvärdet. Låt oss anta att man då måste övergå till en annan vattentäkt. Kostnaden för detta är naturligtvis stor, säg att den är 150 Mkr.

(a) Bestäm riskkostnaden R.

Antag att det går att säkra täkten till en kostnad av ca 25 Mkr. Helt säkert är ju inget, men man bedömmer att sannolikheten att tungmetall når fram till täkten då minskar med ca en faktor 10.

(b) Beräkna riskkostnaden R om täkten säkras.

Vattentäkten kan förstöras/skadas också av andra orsaker. Anta t.ex att risken att en annan förorening (med mindre allvarliga konsekvenser) når fram (snarare påvisas) i vattentäkten är ca 1 på 50. Kostnaden för att åtgärda denna förorening skattas till 2.5 miljoner kr.

(c) Bestäm riskkostnaden som denna harmlösare förorening ger upphov till.

(d) Bestäm täktens totala riskkostnad.

Övning 2) Ett järnvägsspår ska anläggas utmed en älv. Man bedömmer att sannolikheten för en översvämmning så kraftig att tågtrafik omöjliggörs är ca 1/10. Kostnaden, om detta sker, för det trafikerande bolaget beräknas till ca 250 kkr. Vad blir riskkostnaden?

En i sammanhanget bättre definition, som vi kommer att använda nedan, fås om man tänker sig att failure inträffar enl en Poissonprocess med intensitet λ_F st/år.[1] Den årliga ekonomiska risken (riskkostnaden) är då

$$R = C_F \lambda_F \tag{1}$$

(R är alltså den förväntade kostnaden på grund av failure under ett år. Obs att man naturligtvis kan räkna med andra tidsenheter än år.) Slutresultatet blir densamma,

[1] När medicinare talar om risk är det ofta intensiteten i en Poissonprocess som avses

eftersom sannolikheten för minst ett failure i Poissonprocessen är

$$P_F = 1 - e^{-\lambda_F} \approx \lambda_F$$

och approximationen är god då λ_F är litet. Dessutom kan det ju faktiskt inträffa fler än ett failure under ett år även om sannolikheten för det är försvinnande liten. Så detta processbaserade sätt att definiera riskkostnaden R är klart vettigare.

Övning 3) Tänk dig en lastprocess som den i häftet om Poissonprocessen [3]. Antag att vi vet att tillbud sker med intensiteten $\lambda_T \approx 0.15$, samt att styrkan av dessa är oberoende och fördelade enl Paretofördelning[2]

$$1 - F(x|T) = P(X > x|T) = \left(\frac{x_T}{x}\right)^{\alpha}, \quad x \geq x_T$$

Vi ska anta att tillbudsnivån $x_T = 5.0$ och att $\alpha \approx 7.1$. Antag dessutom att katastrofnivån är $x_K = 7.0$ och vidare att katastroferna i lastprocessen kostar 100 kkr/st.

(a) Beräkna riskkostnaden.

(b) Genom att vid varje tillbud aktivt bearbeta lastprocessen räknar man med att kunna reducera $P(K|T)$ till hälften. Denna aktivitet kostar 10 kkr/tillbud. Vad blir riskkostnaden?

(c) I ovanstående deluppgift såg vi att det inte lönar sig att lägga ned 10 kkr/tillbud, för riskkostnaden minskar inte totalt. Hur mycket får det kosta att reducera $P(K|T)$ till hälften, om riskkostnaden ej ska öka?

(d) Genom att vid tillbud koppla in ytterligare en maskin kan man höja katastrofnivån till 10. Vad blir i så fall intensiteten i katastrofsprocessen?

(e) Antag att kostnaden för maskinen i ovanstående uppgift är 3.5 kkr per timma och att katastrof fortfarande kostar 100 kkr. Beräkna riskkostnaden om tillbuden i snitt pågår i 2.9 timmar. (Ledning: räkna som om varje tillbud kostar $2.9 \cdot 3.5 = 10.15$ kkr.)

I den sista övningen ovan är failurekostnaden stokastisk. Man kan visa att även i sådana fall kan man räkna som om den vore fix. Det gäller alltså att uttrycket

$$R = C_F \lambda_F$$

för riskkostnaden är korrekt även om failurekostnaden är stokastisk. Det som är viktigt är att förekomsten av failure följer en Poissonprocess och att failurekostnaderna är oberoende av när i tiden de inträffar (d v s av Poissonprocessen) och att

[2] Obs att denna definitionen av Paretofördelningen ej är den vi använde oss av i [3]. Det går därför inte att använda formlerna som härleddes i [3] rakt av

kostnader hörande till olika failure är oberoende stokastiska variabler med väntevärde C_F.

Vid överbelastning upphör många konstruktioner att fungera. Tänk dig att överbelastning inträffar enl en Poissonprocess med intensitet λ_F st/tidsenhet och att de tidsrymder konstruktionen är urdrift är oberoende stokastiska variabler med väntevärde μ och att kostnaden för ett stopp är proportionellt mot stoppets längd. Om proportionalitetskonstanten är C kkr/tidsenhet, så blir riskkostnaden enl vad som sagts ovan $R = \lambda_F C \mu$ kkr.

Nu tillbaks till vår tänkta beslutssituation. Antag att samhället till en kostnad av ca 10 Mkr kan installera ett larmsystem, som bedöms reducera sannolikheten för ett tungmetallutsläpp som når vattenintaget med en faktor 10. Riskkostnaden, om denna investering göres, blir ca $1.5/10 = 0.15$ Mkr/år.

Under n år blir samhällets förväntade kostnad ca $1.5n$ Mkr om ingen åtgärd görs, och ca $10 + 0.15n$ Mkr om larmsystemet installeras.

Man brukar införa den s k *objektfunktionen*

$$\Phi_i(n) = K_i + R_i \cdot n \tag{2}$$

där K_i är investeringskostnaden och R_i är den riskkostnad som återstår då investeringen är gjord. Indexet i betecknar handlingsalternativet och n är den aktuella tidsrymden. I uttrycket för objektsfunktionen har vi inte tagit hänsyn till en ev förändring av framtida riskkostnader på grund av att penningvärdet förändras.

I vårt exempel har vi

$$\begin{aligned} \Phi_0^S(n) &= 1.5n \\ \Phi_1^S(n) &= 10 + 0.15n \end{aligned}$$

där indexet 0 betecknar nuläget och 1 läget efter en ev installation av larmsystemet (S anger att det är samhällets objektsfunktion; vi ska strax studera detta beslutsproblem ur ett annat perspektiv). Genom att titta efter hur stort n behöver vara för att $\Phi_1^S(n) \leq \Phi_0^S(n)$ (svar: $n \approx 7.4$ år) får vi en del av det underlag samhällets beslutsfattare behöver för att avgöra om alternativ 1 med en investering på $K_1 = 10$ Mkr är lönsamt. Här är det alltså så att investeringen är lönsam om tidsperspektivet är längre än ca 7 och ett halvt år, vilket ofta är fallet i samhälleliga sammanhang.

Vi ska nu analysera samma beslutssituation ur företagets synvinkel. Utsläppen antas ske enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda_T = 2.5$ st/år. I den terminologi vi införde i anteckningarna om Poissonprocessen och höga laster är detta tillbudsprocessen (vi kan kalla den N^T). Failure F innebär att utsläppet är så starkt att det når fram till och påverkar vattenverkets vattenintag. Man bedömmer att ca

4% av utsläppen är så kraftiga att de når fram till vattenintaget. Den betingade sannolikheten för F givet T är alltså $P(F|T) \approx 0.04$. Failureprocessen N^F blir då Poisson med intensitet $\lambda_F = \lambda_T P(F|T) = 0.1$ st/år. Så långt är företagets analys i samklang med samhällets.

Varje tillbud kostar företaget ca $C_T = 0.1$ Mkr i utebliven försäljning och fördyrning av produktionen eftersom en del kemiska processer då måste stannas upp och startas om, m.m. Failure kostar företaget ytterligare ca $C_F = 25$ Mkr. Här ingår kostnader för att sanera vattenverket på ca 15 Mkr, ett bötesbelopp på 5 Mkr, samt goodwill-kostnader på ca 5 Mkr. I nuläget är därför företagets ekonomiska risk

$$R = C_T \lambda_T + C_K \lambda_F = 0.25 + 2.5 = 2.75 \quad \text{Mkr/år}$$

Det är viktigt att notera att företaget tar två risker - en som inträffar med hög årlig sannolikhet och en som företaget med lite tur slipper.

Låt N_t^T och N_t^F beteckna antalet tillbud T och antalet failure F under tidsintervallet $[0, t]$. Låt dessutom $N_t^{T\setminus F} = N_t^T - N_t^F$ vara antalet tillbud som ej resulterar i failure under samma tidsintervall. Man kan visa att $N^{T\setminus F}$ är en av N^F oberoende Poissonprocess med intensitet $\lambda_T - \lambda_F = \lambda_T P(F^c|T)$.

Övning 4) Hur stor är sannolikheten att företaget under ett år ej har större riskkostnader än 0.5 Mkr.

Det kostar ca 25 Mkr att investera i ny teknik, vilket skulle reducera $P(F|T)$ med en faktor 2 till 0.02. Denna investering reducerar samtidigt tillbudsintensiteten λ_T med en faktor 5 till ca 0.5 st/år. Riskkostnaden, om denna investering genomförs, blir ca $0.05 + 0.25 = 0.3$ Mkr/år.

Företagets beslutsfattare har alltså att välja på alternativen

$$\begin{aligned} \Phi_0^C(n) &= 2.75n \\ \Phi_1^C(n) &= 25 + 0.3n \end{aligned}$$

Investeringen (alternativ 1) blir lönsam i ett tidsperspektiv på drygt 10 år[3], vilket av företaget bedöms vara lite väl långt utifrån ett strikt ekonomiskt perspektiv. Man tycker internt att man gott kan chansa på att man inte får något utsläpp som når vattenintaget under de närmsta åren. Sannolikheten för ett sådant utsläpp är ju faktiskt ganska liten (jfr övning 4 ovan). Det finns kanske också andra skäl till att man inte vill investera i ny teknik just nu.

Men observera att denna investering i ny teknik i företaget skulle reducera λ_F till 0.01 st/år, vilket är precis vad det påtänkta larmsystemet skulle åstadkomma

[3] ty $25 + 0.3n \leq 2.75n$ precis då $n \geq 25/2.45 \approx 10$

för samhället. Ett tredje alternativ för samhället skulle därför kunna vara att hjälpa företaget att genomföra investeringen om 25 Mkr. Låt oss tänka tanken att samhället istället för att investera 10 Mkr i larmsystemet betalar lika mycket av företagets investering. Samhällets har då ett alternativ 2 med objektfunktionen

$$\Phi_2^S(n) = 10 + 0.15n = \Phi_1^S(n)$$

Företagets alternativ 1 övergår i ett bättre alternativ 2 med objektfunktionen

$$\Phi_2^C(n) = 15 + 0.3n$$

Ingen ekonomisk skillnad alltså mellan alternativ 1 och 2 för samhället. Men för företaget blir alternativ 2 lönsamt redan efter drygt 6 år, vilket ägarna borde ha lättare att acceptera. Även om de ekonomiska utsikterna inte förändras för samhället kan detta sista alternativ vara att föredra för eftersom det reducerar slitaget på miljön. Det är ju rimligen vettigare att investera så att utsläppen minskas jämfört med att investera så att ett ev utsläpp upptäckts tidigare. Hade vi räknat in en miljöslitaget i samhällets C_F (vilket man nog bör göra) hade det också för samhället varit så att alternativ 2 blivit lönsammare än alternativ 1.

Ofta har man (åtminstone i teorin) hyfsad koll på sannolikheten för ”failure”, dvs att det går fel. En inte ovanlig situation är att man medelst simulering kan uppskatta denna sannolikhet. Viktigt att hålla i minnet är då att resultatet bara är giltligt om simuleringsmodellen beskriver verkligheten korrekt.

Övning 5) Antag att man i en serie av 10 000 simuleringar erhöll failure F i $f = 73$ av dem. Skatta sannolikheten för failure, p_F, och beräkna ett uppåt begränsat konfidensintervall. Konfidensgraden ska vara ca 95%.

Ibland behöver man ta till Bayesianska metoder för att uppdatera sannolikheten för failure.

Övning 6) Tio mätningar av en viss sjös surhet ska göras i avsikt att avgöra om den behöver kalkas eller ej och man vet från andra sjöar i omgivningen att sannolikheten att pH-värdet understiger det aktuella gränsvärdet är $p_c \approx 0.3$. Man bedömmer att denna förhandsinformation är ungefär lika mycket värd som informationen från de 10 mätningarna som ska göras.

(a) Föreslå en lämplig à priorifördelning för p_c.

(b) Regeln är att sjön ska kalkas om minst 6 av de 10 mätningarna understiger gränsvärdet. Bestäm à priorisannolikheten för kalkning.

(c) Det visade sig att gränsvärdet understegs i 5 av de 10 mätningarna. Bestäm à posterioriskattningen av sannolikheten p_c.

I många situationer, liknande den i övningen ovan, har man en à priorisannolikhet för failure F, som uppdateras efter mätningar. Här följer ytterligare en sådan övning. Låt D vara händelsen att man detekterar (upptäcker) failure F.

Övning 7) Ett icke ovanligt sätt att modellera total okunskap är att ansätta att sannolikheten för failure är $P(F) = 0.5$. Antag nu att man gör vissa undersökningar. Erfarenhetsmässigt vet man att den betingade sannolikheten att detektera failure givet failure är $P(D|F) = 0.8$ samt att feldetekteringssannolikheten är $P(D|F^c) = 0.1$.

(a) Bestäm sannolikheterna för failure givet detektion resp ingen detektion.

(b) Antag nu att man inte detekterade failure och gör ytterligare ett försök att detektera failure med samma detekterings- och feldetekteringssannolikheter. Bestäm sannolikheterna för failure givet detektion resp ingen detektion. (Ledning: nu är det inte längre rimligt att ansätta $P(F) = 0.5$.)

Facit till övningarna

1) (a) 150 kkr (b) 15 kkr (c) 50 kkr (d) 200 kkr

2) 25 kkr

3) (a) 1.38 kkr/dygn (b) 2.19 kkr/dygn (c) 4.59 kkr/tillbud (d) 0.00109 st/dygn (e) 1.63 kkr/dygn

4) ≈ 0.87

5) $\hat{p}_f = 0.0073$, $p_F < 0.0087$ ($\approx 95\%$)

6) (a) $\beta(4, 8)$ (b) ≈ 0.047 (c) $\hat{p}_c = 0.4$

7) (a) $P(F|D) = 8/9 \approx 0.889$, $P(F|D^c) = 2/11 \approx 0.182$ (b) $P(F|D) = 16/27 \approx 0.593$, $P(F|D^c) = 4/85 \approx 0.047$

Referenser

[1] Devore, Jay & Nicholas Farnum: Applied Statistics for Engineers and Scientists. Duxbury Press, 1999.

[2] Tommy Norberg: Introduktion till Bayesiansk uppdatering. Häfte 2005.

[3] Tommy Norberg: Poissonprocessen och extrema laster. Häfte 2005.