Slumptal genereras i datorer

De ska efterlikna oberoende observationer från U$(0,1)$-fördelningen

Här är resultatet av Matlab-kommandot `rand(1,5)`

0.6227 0.9203 0.2867 0.2944 0.3899

Detta är en simulering av 5 oberoende observationer av U$(0,1)$

Här är resultatet av `floor(2*rand(1,15))`

1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1

Detta är en simulering av 15 oberoende slantsinglingar med ett symmetriskt mynt

Här är resultatet av `ceil(6*rand(1,10))`

1 3 4 4 6 4 5 3 1 3

Detta är en simulering av 10 oberoende kast med en symmetrisk tärning

Algoritm för simulering av ett kast med en symmetrisk tärning

1. Generera ett slumptal u
2. Låt

$$
\begin{array}{lll}
x = 1 & \text{om} & u \leq 1/6 \\
x = 2 & \text{om} & 1/6 < u \leq 2/6 \\
x = 3 & \text{om} & 2/6 < u \leq 3/6 \\
x = 4 & \text{om} & 3/6 < u \leq 4/6 \\
x = 5 & \text{om} & 4/6 < u \leq 5/6 \\
x = 6 & \text{om} & 5/6 < u
\end{array}
$$

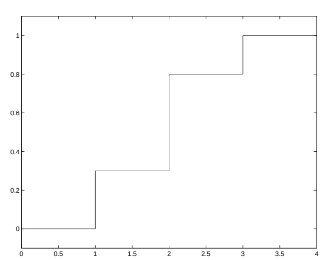
Låt x vara resultatet av ett försök och antag att motsv slumpvariabel X har sannolikhetsfördelningen

x	1	2	3
$p(x)$	0.3	0.5	0.2

Algoritm för generering av en observation x av X

1. Generera ett slumptal u
2. Låt

$$
\begin{array}{lll}
x = 1 & \text{om} & u \leq 0.3 \\
x = 2 & \text{om} & 0.3 < u \leq 0.8 \\
x = 3 & \text{om} & 0.8 < u
\end{array}
$$



Simulering av bin$(4, 0.2)$

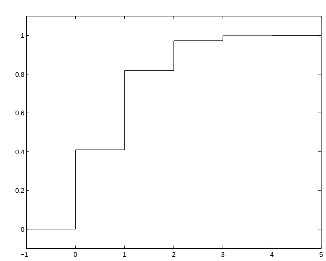
Sannolikhetsfördelning

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

Algoritm

1. Generera ett slumptal u
2. Låt

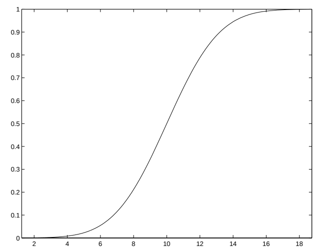
$$
\begin{array}{lll}
x = 0 & \text{om} & u \leq 0.4096 \\
x = 1 & \text{om} & 0.4096 < u \leq 0.8192 \\
x = 2 & \text{om} & 0.8192 < u \leq 0.9728 \\
x = 3 & \text{om} & 0.9728 < u \leq 0.9984 \\
x = 4 & \text{om} & 0.9984 < u
\end{array}
$$



Simulering av N$(10, 2.5)$

Algoritm

1. Generera ett slumptal u
2. Lös x ur ekvationen
$$u = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$
där $f(y)$ är N$(10, 2.5)$-tätheten



Simulering av en kontinuerlig slumpvariabel med täthet $f(x)$

Låt $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$

Om möjligt, bilda F:s invers F^{-1}.
Skriv därvid om uttrycket $u = F(x)$ på formen $x = F^{-1}(u)$

Algoritm

1. Generera ett slumptal u
2. Bilda $x = F^{-1}(u)$. Om detta ej går, lös ut x ur $u = F(x)$ med numeriska ekvationslösningsmetoder

Bevis

$U = F(X)$ är U$(0,1)$-fördelad, ty
$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u)$$
$$= P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$$
Men $U = F(X) \Leftrightarrow X = F^{-1}(U)$ V.S.V

Att $F^{-1}(U)$ har samma fördelning som X, kallas ibland för simulerarnas huvudsats.

Simulering av $\exp(\lambda)$

Tätheten är $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ för $x > 0$

Således är fördelningsfunktionen
$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\,dy = 1 - e^{-\lambda x}$$
Vi löser x ur $u = F(x)$ och får
$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$
Således är
$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$
en simulerad observation av $\exp(\lambda)$ om u är ett slumptal.

Men om u är ett slumptal, så är även $1 - u$ det, och vi kan därför lika gärna använda regeln
$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln u$$
vid simulering av $\exp(\lambda)$

Simulering av Par(x_T, α)

Denna fördelning har fördelningsfunktionen
$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_T}{x}\right)^{\alpha} \quad \text{för} \quad x \geq x_T$$
Här är $x_T > 0$ och $\alpha > 0$.

Vi löser ut x ur sambandet
$$u = \left(\frac{x_T}{x}\right)^{\alpha}$$
och erhåller
$$x = \frac{x_T}{u^{1/\alpha}}$$
för slumptal u

Simulering av oberoende observationer av en fördelning

Bilda helt enkelt slumptal $u_1, u_2, \ldots$ och omvandla vart och ett till motsv x-värde

Om vi till exempel vill simulera $n = 5$ oberoende exp(1/10)-observationer, så kan vi i Matlab exekvera scriptet

```
u=rand(1,5);
x=-10*log(u)
```


Simulering av bin$(4, 0.2)$ med en probabilistisk metod

Låt X anta värdet 1 med sannolikheten $p = 0.2$ och 0 med sannolikheten $1 - p = 0.8$

Simulera $n = 4$ oberoende observationer av X

x_1, x_2, x_3, x_4

och bilda deras summa $y = \sum_i x_i$

Då blir y en simulerad observation av bin$(4, 0.2)$

Analogt kan man för givet antal försök n och lyckandesannolikhet p, simulera fram antalet lyckade försök genom att simulera varje försök för sig och räkna efter hur många som lyckades

Simulering av N$(0, 1)$ med Box-Mullers metod

Box-Muller visade att två stokastiska variabler X, Y är oberoende och N$(0, 1)$-fördelade om, och endast om, motsvarande vektors längd

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

och vinkel mot X-axeln

$$\phi = \arctan \frac{X}{Y}$$

är oberoende och sådana att ϕ är U$[0, 2\pi)$-fördelad medan R:s fördelning är definierad av tätheten

$$f(r) = re^{-r^2/2} \quad \text{för} \quad r > 0$$

Genom att simulera en observation $r = \sqrt{-2 \ln u_1}$ av R och en oberoende observation $\phi = 2\pi u_2$ från U$[0, 2\pi)$-fördelningen och gå från polära (r, ϕ) till kartesiska koordinater (x, y) enligt

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

får vi, enl Box-Mullers resultat, att x, y är två oberoende observationer från N$(0, 1)$-fördelningen

Övning: Visa själv att $F(r) = 1 - e^{-r^2/2}$ för $r \geq 0$ och att ekvationen $u = e^{-r^2/2}$ löses av $r = \sqrt{-2 \ln u}$.

Simulering av N(μ, σ)

Börja med att simulera en observation z från N$(0, 1)$-fördelningen. Använd lämpligen Box-Mullers metod. Bilda sedan $x = \mu + \sigma z$.

Simulering av LN(μ, σ)

Börja med att simulera en observation $y = \mu + \sigma z$ från N(μ, σ)-fördelningen. Bilda sedan $x = e^y$