

Tommy Norberg
Matematisk statistik
Chalmers & GU
27 mars 2003

Introduktion till stokastisk simulering¹

Vi lär oss först en standardmetod som alltid går att tillämpa, men som kan vara beräkningsmässigt ineffektiv i vissa situationer. Sedan ska vi titta på hur man med probabilistiska metoder kan hantera flera viktiga specialfall.

Slumptal

Slumptal $u_1, u_2, \dots$ genereras rekursivt i datorer av speciella programkommandon. I Matlab tilldelar kommandot `rn=rand(1:5)` fältet `rn` en vektor bestående av 5 st slumptal. Men observera att sekvensen $u_1, u_2, \dots$ är helt deterministisk. Den är dock konstruerad i syfte att verka totalt slumpmässig och så att varje u_i antar varje värde i enhetsintervallet $(0, 1)$ med lika stor sannolikhet. Detta kan göras mer eller mindre bra och man bör vara lite uppmärksam när man börjar arbeta i ett nytt programspråk, vars slumptalsgenerator man inte har tidigare erfarenhet av.

Det innebär praktiskt att om man har låtit sitt program generera 5 st slumptal $u_1, \dots, u_5$, så kan vi tänka oss dem som 5 st oberoende observationer av en stokastisk variabel U , som är likformigt fördelad på $(0, 1)$. Jag påminner om att U är likformigt fördelad på $(0, 1)$, vilket ofta skrives $U \sim U(0, 1)$, om U :s täthetsfunktion är

$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 < u < 1 \\ 0 & \text{f.ö} \end{cases}$$

Notera också att U :s fördelningsfunktion är

$$F(u) = P(U \leq u) = \begin{cases} 0 & \text{om } u \leq 0 \\ u & \text{om } 0 < u < 1 \\ 1 & \text{om } u \geq 1 \end{cases}$$

Att två slumptal u_1, u_2 är oberoende observationer av $U \sim U(0, 1)$, betyder att den betingade fördelningen för den andra, U_2 , givet den första, U_1 , fick värdet u_1 ej beror av u_1 . M.a.o.

$$f_{U_2|U_1=u_1}(u_2) = f_{U_2}(u_2) = 1, \quad 0 < u_2 < 1$$

¹Version 1.0

(I ord: den betingade tätheten för U_2 , givet att $U_1 = u_1$, beror ej av u_1 .) Beteckningen $f_{U_2|U_1=u_1}(u_2)$ är klumpig. Ofta är det vettigare att istället skriva $f(u_2|u_1)$, trots att detta av många matematiker anses slarvigt. Att $f(u_2|u_1)$ ej beror av u_1 innebär då helt enkelt att

$$f(u_2|u_1) = f(u_2)$$

där vi skrivit $f(u_2)$ istället för det klumpigare $f_{U_2}(u_2)$.

Ett matematiskt ekvivalent sätt att uttrycka oberoendet är att den gemensamma tätheten för u_1, u_2 faktoriseras enl.

$$f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = f_{U_1}(u_1)f_{U_2}(u_2) = 1, \quad 0 < u_1, u_2 < 1$$

Också här är det ofta enklare (och bättre) att skriva $f(u_1, u_2)$ istället för $f_{U_1, U_2}(u_1, u_2)$, $f(u_1)$ istället för $f_{U_1}(u_1)$ och, som i föregående stycke, $f(u_2)$ istället för $f_{U_2}(u_2)$. Att variablerna u_1, u_2 är oberoende innebär då helt enkelt att

$$f(u_1, u_2) = f(u_1)f(u_2)$$

Man kan mycket väl tänka sig att två $U(0, 1)$ -fördelade variabler ej är oberoende. Ett triviale exempel fås genom att låta U_1 vara $U(0, 1)$ -fördelad och sätta $U_2 = U_1$. Nedan följer ett liknande, men aningen mer komplicerat exempel på två beroende $U(0, 1)$ -fördelade variabler.

Exempel 1: Antag att U_1, U_2 har tätheten $f(u_1, u_2) = 2$ då $0 < u_1, u_2 < 0.5$ eller $0.5 \leq u_1, u_2 < 1$. M.a.o., U_1, U_2 är likformigt fördelad på unionen av de två rektanglarna $(0, 0.5) \times (0, 0.5)$ och $[0.5, 1) \times [0.5, 1)$. Då gäller att både U_1 och U_2 är $U(0, 1)$. (Rita figur och tänk!). Marginalfördelningarna är alltså $U(0, 1)$. Men observera att U_1 och U_2 är ej oberoende. Har man observerat värdet av U_1 så vet man vilken av händelserna $0 < U_2 < 0.5$ och $0.5 \leq U_2 < 1$ som har inträffat. $\square$

Övning 1) Visa att marginalfördelningarna för den bivariata fördelningen i exemplet ovan är just $U(0, 1)$.

Simulering av diskreta stokastiska variabler

Antag att X kan anta de tre värdena 1, 2, 3 med sannolikheterna $p_1 = 0.25, p_2 = 0.40, p_3 = 0.35$. Vi börjar med att konstruera en stokastisk variabel med samma fördelning som X . Tag $U \sim U(0, 1)$ och definiera

$$\tilde{X} = \begin{cases} 1 & \text{då } U \leq 0.25 \\ 2 & \text{då } 0.25 < U \leq 0.65 \\ 3 & \text{då } U > 0.65 \end{cases}$$

Att X och $\tilde{X}$ har samma fördelning kan skrivas $\tilde{X} \stackrel{d}{=} X$.

Om u nu är ett slumpstal, så är u , enl. ovan, en simulerad observation av U . Men då är ju x , definierad av

$$x = \begin{cases} 1 & \text{då } u \leq 0.25 \\ 2 & \text{då } 0.25 < u \leq 0.65 \\ 3 & \text{då } u > 0.65 \end{cases}$$

en simulerad observation av $\tilde{X}$ och också av X , eftersom $\tilde{X} \stackrel{d}{=} X$.

Om nu X allmänt har utfallsrummet $x_1, x_2, \dots$ och $P(X = x_i) = p_i$, så kan vi simulera en observation x av X , genom att generera ett slumpstal u och låta

$$x = \begin{cases} x_1 & \text{då } u \leq p_1 \\ x_2 & \text{då } p_1 < u \leq p_1 + p_2 \\ x_3 & \text{då } p_1 + p_2 < u \leq p_1 + p_2 + p_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Något bevis av detta behövs knappast. Det räcker att referera till argumentationen i specialfallet ovan.

I några övningar i detta häfte ska du ge som svar en algoritm för någon slags stokastisk simulering. Åtminstone i en del fall är det praktiskt att ge svaret i form av ett Matlab-program.

Övning 2) (a) Ge en algoritm för simulering av ett kast med en symmetrisk sex-sidig tärning. (b) Antag att tärningen är osymmetrisk på ett sådant sätt att sannolikheten för 6:a är förhöjd med 10% och sannolikheten för 1:a är minskad med motsv. belopp och övriga sidor har oförändrade sannolikheter. Ge en algoritm för simulering av kast med en sådan tärning.

Övning 3) Ge en algoritm för simulering av en $\text{Bin}(4, 0.2)$ -fördelad stokastisk variabel.

Övning 4) Ge en algoritm för simulering av en $\text{Poi}(2)$ -fördelad stokastisk variabel.

Vissa stokastiska variabler, som de $\text{Bin}(n, p)$ -fördelade, har en probabilistisk tolkning som man kan använda i en simulering. För att exemplifiera tekniken ska vi ge en alternativ lösning till övning 3 ovan. Låt $X \sim \text{Bin}(4, 0.2)$. Då kan vi tänka oss X som antalet lyckade försök utav $n = 4$ oberoende, där sannolikheten för att ett visst försök ska lyckas är $p = 0.2$. Generera $n = 4$ slumpstal $u_1, \dots, u_n$ och låt x vara antalet i sådana att $u_i \leq p = 0.2$. Då är x en simulerad observation av $\text{Bin}(4, 0.2)$ -fördelningen.

Matlab-tips

I "Statistics toolbox" finns kommandon för beräkning av de vanligaste av de diskreta mass- och fördelningsfunktionerna. Kommandot `help stats` ger en förteckning över alla tillgängliga kommandon. Jag nöjer mig med att nämna här `binopdf` och `binocdf` samt `poisspdf` och `poisscdf`, med vars hjälp man kan beräkna binomial- och Poissonsannolikheter. Använd `help`-funktionen för att ta reda på hur de ska användas och vad de gör.

I Matlab finns även kommandon för generering av t.ex. binomialfördelade och Poissonfördelade slumpstal. Det är inte meningen att man ska använda denna typ av kommandon i lösningarna till övningarna i detta häfte. Övningarna syftar ju till att man ska bygga upp en viss förståelse för hur sådana kommandon fungerar.

Simulering av kontinuerliga stokastiska variabler

Antag nu att den stokastiska variabeln X är kontinuerligt fördelad med täthet $f(x)$ och fördelningsfunktion $F(x)$. Vi börjar med att konstatera att om $X \stackrel{d}{=} h(U)$, där $U \sim U(0, 1)$, så är $x = h(u)$ en simulerad observation av X om u är ett slumpstal.

Sambandet mellan $f(x)$ och $F(x)$ är

$$f(x) = F'(x) \Leftrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

Dessutom gäller

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Vi ska anta att $F(x)$ är strängt växande. Då existerar en entydigt bestämd invers $F^{-1}(p)$ (som ibland kallas *kvantilfunktionen*), definierad av att

$$p = F(x) \Leftrightarrow x = F^{-1}(p)$$

och det gäller att

$$F^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F(x)$$

Det finns ett resultat, som ibland kallas *simulerarnas huvudsats*, som säger att om $U \sim U(0, 1)$, så följer att den stokastiska variabeln $\tilde{X} = F^{-1}(U)$ har samma fördelning som X . Beviset är mycket enkelt:

$$P(\tilde{X} \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x) = P(X \leq x)$$

Två variabler som har samma fördelningsfunktion har naturligtvis också samma täthet. Den senare är ju derivatan av den förra.

Resultatet säger att om u är ett slumpstal och $x = F^{-1}(u)$, så är x en simulerad observation av X . Observera att x fås genom att man löser ekvationen $u = F(x)$ för ett givet slumpstal u . Ibland är detta mycket enkelt. Ibland får man ta till numeriska lösningsmetoder.

Exempel 2: Antag att $T \sim \text{Exp}(\lambda)$. Då är T :s täthet och fördelningsfunktion

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Observera nu att

$$u = F(t) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

Således är $t = -(1/\lambda) \ln(1 - u)$ en simulerad observation av T om u är ett slumpstal. Men notera att om u är ett slumpstal, så är $1 - u$ det likaså. Således kan vi i formeln ovan ersätta $1 - u$ med u , och erhåller den ur beräkningssynpunkt något mer ekonomiska regeln

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln u$$

för simulering av $\text{Exp}(\lambda)$. □

Ibland går det emellertid inte att explicit lösa x ur $u = F(x)$. Då får man använda numeriska ekvationslösningsverktyg. Ett exempel på detta är när X är normalfördelad, ty då är

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy$$

Inversen till denna funktion går inte att explicit beräkna, men det är naturligtvis inget problem att numeriskt lösa x ur

$$u = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy$$

för slumpstal u . Att det finns andra enklare sätt att simulera normalfördelade observationer återkommer vi till.

Observera också att det finns fall då fördelningsfunktionen $F(x)$ ej är strängt växande. Även då gäller simulerarnas huvudsats, men man måste vara extra försiktig då man löser x ur $u = F(x)$.

De flesta slumpalsgeneratorer behöver initieras. Man har då möjlighet att antingen ge ett förutbestämt s.k. frö ("seed" på engelska). Fördelen med detta är att man ska kunna upprepa en simulering och få exakt samma resultat. En andra möjlighet är att ge ett totalt slumpmässigt frö. Det bör man göra vid produktionskörning, men det kan vara en god idé att spara fröet, så att körningen kan göras om. I Matlab kan man ge ett slumpmässigt frö så här: `seed=sum(100*clock); rand('state',seed);`

Övning 5) Senare i kursen kommer vi att stöta på Pareto-fördelade stokastiska variabler. Paretofördelningen parametreras något olika i olika sammanhang. I häftet om Poissonprocessen och extrema laster har jag valt att parametrera den så att tätheten blir

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{u} \left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha}, \quad x \geq u$$

där $u > 0$ och $\alpha > -1$. Härled en algoritm för simulering av observationer av stokastiska variabler med denna täthet.

Övning 6) Den s.k. generaliserade Paretofördelning har fördelningsfunktionen

$$F(x) = 1 - \left(1 + \gamma \frac{x}{\sigma}\right)^{-1/\gamma}, \quad x > 0 \text{ \& } 1 + \gamma \frac{x}{\sigma} > 0$$

För parametrarna σ (som ger skalan) och γ (som ger fördelningens form) gäller

$$\sigma > 0, \quad -\infty < \gamma < \infty$$

Observera att då $\gamma = 0$ är $F(x) = 1 - \lim_{\gamma \rightarrow 0} (1 + \gamma x/\sigma)^{-1/\gamma} = 1 - e^{-x/\sigma}$ för $x > 0$. Det är bara då $\gamma < 0$ som kravet $1 + \gamma x/\sigma > 0$ innebär en begränsning. Då gäller att en generaliserad Paretovariabel har utfallsrummet $0 < x < -\sigma/\gamma$. Annars är utfallsrummet $x > 0$. Härled en algoritm för simulering av observationer från den generaliserade Paretofördelningen.

Simulering av oberoende observationer

Antag att vi ska simulera n oberoende observationer av en stokastisk variabel X med täthet (eller massfunktion) $f(x)$ och fördelningsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$$

Då genererar vi helt enkelt n slumpstal u_i och löser x_i ur

$$u_i = F(x_i)$$

Då är $x_1, \dots, x_n$ oberoende observationer av X .

Övning 7) Skriv en algoritm (eller ett Matlab-program) för simulering av n oberoende observationer av en $\text{Exp}(\lambda)$ -variabel.

Övning 8) Skriv en algoritm (eller ett Matlab-program) för simulering av oberoende observationer $x_1, x_2, \dots$ av en $\text{Exp}(\lambda)$ -variabel, som avbryts då $\sum_{i=1}^n x_i > 1$ första gången.

Simulering av beroende observationer

Låt $f(x, y)$ vara bivariat täthet (i det kontinuerliga fallet eller massfunktion i det diskreta fallet) för de två stokastiska variablerna X, Y . Definiera

$$f(x) = \int_R f(x, y) dy$$

(i det diskreta fallet, ersätter vi integrationen med motsv. summation) och

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

Då är $f(x)$ X :s täthet och $f(y|x)$ är den betingade tätheten för y givet att $X = x$. Motsv. fördelningsfunktioner ska vi beteckna $F(x)$ och $F(y|x)$.

Börja simuleringen av det bivariata paret X, Y med att simulera en observation x av X . Enl. vad som sagts ovan görs detta genom att vi genererar ett slumpstal u och löser x ur ekvationen $u = F(x)$. Nu kan vi tänka oss att vi vet att $X = x$ och Y :s betingade täthet är då $f(y|x)$. Simulerar vi en observation y från denna täthet, så följer att x, y är en simulerad observation av X, Y . Detta sker genom att vi genererar ytterligare ett slumpstal v och sedan löser y ur ekvationen $v = F(y|x)$.

Alltså: vid simulering av två stokastiska variabler X, Y , generera två slumpstal u, v och lös först x ur $u = F(x)$ och sedan y ur $v = F(y|x)$.

Antag nu att $f(x, y, z)$ är täthet för trippeln X, Y, Z . Vi bildar först X, Y :s gemensamma täthet

$$f(x, y) = \int_R f(x, y, z) dz$$

Sedan bildar vi den betingade fördelningen för Y , givet att $X = x, Y = y$, enl.

$$f(z|x, y) = \frac{f(x, y, z)}{f(x, y)}$$

Låt $F(z|x, y)$ vara motsv. fördelningsfunktion. Ska vi simulera en observation av trippeln X, Y, Z börjar vi med att generera två slumpstal u, v och räkna

fram x, y enl. ovan. Sedan genererar vi ytterligare ett slumpstal w och löser z ur ekvationen $w = F(z|x, y)$. Då är trippeln x, y, z en simulerad observation av X, Y, Z .

Alltså: vid simulering av tre stokastiska variabler X, Y, Z , generera tre slumpstal u, v, w och lös först x ur $u = F(x)$, sedan y ur $v = F(y|x)$ och till sist z ur $w = F(z|x, y)$.

Det torde nu vara helt klart hur man bär sig åt för att simulera fler än tre beroende observationer.

Probabilistiska metoder

Ovan har vi lärt oss generell metod att simulera oberoende såväl som beroende observationer av slumpmässiga fenomen. Nu ska vi titta på några speciella situationer.

Simulering av $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Vi kan tänka oss att X är antalet lyckade utav n oberoende försök, där varje försök lyckas med sannolikheten p . Generera n slumpstal $u_1, \dots, u_n$. Antalet i sådana att $u_i \leq p$ är en simulerad observation av $\text{Bin}(n, p)$ -fördelningen.

Simulering av $X \sim \text{Geo}(p)$

Generera succesivt slumpstal u_i . Sluta då $u_i \leq p$ inträffar för första gången. Antalet genererade slumpstal u_i är en simulerad observation av $\text{Geo}(p)$ -fördelningen.

Simulering av $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Har vi studerat i exempel 2 ovan. Jag påminner om att $x = (-\ln u)/\lambda$ är en simulerad observation av $\text{Exp}(\lambda)$ -fördelningen om u är ett slumpstal.

Simulering av $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

Beräkna successivt x_i enl. $x_i = (-\ln u_i)/\lambda$, där $u_1, u_2, \dots$ är slumpstal. Sluta då $\sum_i x_i > 1$ för första gången. Om x är antalet genererade slumpstal, så är $x - 1$ en simulerad observation av $\text{Poi}(\lambda)$.

Simulering av $X \sim N(\mu, \sigma)$

Använd Box-Mullers metod, som säger att z_1, z_2 , givna av

$$z_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cos 2\pi u_2$$

$$z_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \sin 2\pi u_2$$

kan betraktas som oberoende observationer av $N(0, 1)$ om u_1, u_2 är slumpstal. Då är $x_1 = \mu + \sigma z_1$ och $x_2 = \mu + \sigma z_2$ en simulering av två oberoende observationer av $N(\mu, \sigma)$.

Simulering av $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma)$

Använd att $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma)$ om, och endast om, $Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma)$. Så simulera en observation y av Y , t.ex. m.h.a. Box-Mullers metod (se ovan), och låt $x = e^y$. Då är x en observation av $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma)$.

Simulering av $X_1, X_2 \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2, \rho)$

Använd Box-Mullers metod (se ovan) för att simulera två oberoende observationer z_1, z_2 av $N(0, 1)$. Bilda sedan

$$x_1 = \mu_1 + \sigma_1 z_1$$

och låt

$$x_2 = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} z_2$$

Då är x_1, x_2 en simulerad observation av $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2, \rho)$. Observera att $-1 \leq \rho \leq 1$ och att det är bara då $\rho = 0$ som observationerna är oberoende. Observera också att observationerna är linjärt beroende ifall $\rho = \pm 1$.

Övning 9) Visa att om Z_1, Z_2 är $N(0, 1)$ och oberoende, så är paret X_1, X_2 , givet av

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + \sigma_1 Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \end{aligned}$$

$N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ -fördelat. (Ledning: Linjärkombinationer av normalfördelade variabler är normalfördelade.)

Svar eller lösningar till övningarna

1) Av symmetrin följer att $U_1 \stackrel{d}{=} U_2$. Den förras täthet är $f(u_1) = \int_R f(u_1, u_2) du_2$. Om $0 < u_1 < 0.5$ får vi att $f(u_1) = \int_0^{0.5} 2 du_2 = 1$ och om $0.5 \leq u_1 < 1$ får vi

istället $f(u_1) = \int_{0.5}^1 2 du_2 = 1$. Vi ser att $f(u_1) = 1$ för $0 < u_1 < 1$, vilket visar att $U_1 \sim U(0, 1)$.

2) (a) $x = [6u - 1]$, där $[y]$ betyder heltalsdelen av y . (b) T.ex. $x = 1 \Leftrightarrow u \leq 9/60$, $x = 6 \Leftrightarrow 9/60 < u \leq 20/60 = 2/6$, $x = 3 \Leftrightarrow 2/6 < u \leq 3/6$, $x = 4 \Leftrightarrow 3/6 < u \leq 4/6$, $x = 5 \Leftrightarrow 4/6 < u \leq 5/6$, $x = 6 \Leftrightarrow u > 5/6$.

3) Bin(4, 0.2) har massfunktionen $p(k) = 4!/(k!(4-k)!) 0.2^k 0.8^{4-k}$ för $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Låt $x = 0$ då $u \leq p(0) = 0.4096$, $x = 1$ då $0.4096 < u \leq p(0) + p(1) = 0.8192$, $x = 2$ då $0.8192 < u \leq p(0) + p(1) + p(2) = 0.9728$, $x = 3$ då $0.9728 < u \leq p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 0.9984$ och $x = 4$ då $u > 0.9984$.

4) Poi(2) har massfunktionen $p(k) = e^{-2} 2^k / k!$ för $k = 0, 1, \dots$. Om vi nöjer oss med 4 decimalers noggrannhet blir algoritmen: Låt $x = 0$ då $u \leq p(0) = 1353$, $x = 1$ då $0.1353 < u \leq p(0) + p(1) = 0.4060$, $x = 2$ då $0.4060 < u \leq \sum_{i=0}^2 p(i) = 0.6767$, $x = 3$ då $0.6767 < u \leq \sum_{i=0}^3 p(i) = 0.8571$, $x = 4$ då $0.8571 < u \leq \sum_{i=0}^4 p(i) = 0.9473$, $x = 5$ då $0.9473 < u \leq \sum_{i=0}^5 p(i) = 0.9834$, $x = 6$ då $0.9834 < u \leq \sum_{i=0}^6 p(i) = 0.9955$, $x = 7$ då $0.9955 < u \leq \sum_{i=0}^7 p(i) = 0.9989$, $x = 8$ då $0.9989 < u \leq \sum_{i=0}^8 p(i) = 0.9998$, $x = 9$ då $0.9998 < u \leq 1.0000$. Denna algoritm har en öppenbar nackdel.

5) Paretofördelningens fördelningsfunktion är $F(x) = \int_u^x \frac{\alpha-1}{u} \left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha} dx = 1 - (x/u)^{-\alpha}$ för $x > u$. Obs. att vi har en parameter som kallas u , så vi låter w beteckna ett slumpstal. Löser vi nu ut x ur $w = F(x)$, så får vi att $x = u(1-w)^{-1/(\alpha-1)}$ och precis som för exponentialfördelningen kan vi byta $1-w$ mot w och får slutligen formeln $x = uw^{-1/(\alpha-1)}$.

6) $x = \sigma (u^{-\gamma} - 1) / \gamma$

7)

8)

9) Enl. ledningen är paret X_1, X_2 N-fördelat. Notera nu att $E[X_1] = E[\mu_1 + \sigma_1 Z_1] = \mu_1 + \sigma_1 E[Z_1] = \mu_1$ och $E[X_2] = E[\mu_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_2] = \mu_2 + \sigma_2 \rho E[Z_1] + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} E[Z_2] = \mu_2$. Variablerna har alltså rätt väntevärden. Att de har rätt standardavvikelser ser vi ur $\text{Var}[X_1] = \text{Var}[\mu_1 + \sigma_1 Z_1] = \text{Var}[\sigma_1 Z_1] = \sigma_1^2 \text{Var}[Z_1] = \sigma_1^2$ och $\text{Var}[X_2] = \text{Var}[\mu_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_2] = \text{Var}[\sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_2] = \text{Var}[\sigma_2 \rho Z_1] + \text{Var}[\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_2] = \sigma_2^2 \rho^2 \text{Var}[Z_1] + \sigma_2^2 (1-\rho^2) \text{Var}[Z_2] = \sigma_2^2 \rho^2 + \sigma_2^2 (1-\rho^2) = \sigma_2^2$. Och att deras korrelation är ρ ser vi ur $\text{Kov}[X_1, X_2] = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = E[\sigma_1 Z_1(\sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_2)] = \sigma_1 \sigma_2 \rho E[Z_1^2] + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} E[Z_1 Z_2] = \sigma_1 \sigma_2 \rho$ ty $E[Z_1 Z_2] = E[Z_1] E[Z_2] = 0$.