

TMS055 Matematisk statistik V2, 12 januari 2005 e V

Anvisningar

Tentamen består av en teoridel med 3 uppgifter och en problemdel med 5 uppgifter. Teoriuppgifterna ska besvaras först. Inga hjälpmedel är tillåtna på denna del. På problemdelen är räknedosa inkl manual, Beta och någon av de läroböcker i matematisk statistik som används på Chalmers tillåtna hjälpmedel. Tillåtna hjälpmedel är även de fyra häftena Introduktion till stokastisk simulering, Bayesiansk uppdatering av sannolikhetsskattningar, Poissonprocessen och extrema laster samt Något om riskkostnader. Det är tillåtet med anteckningar i läroboken och i häftena. Inga andra anteckningar är tillåtna.

Kom ihåg att att alla svar skall motiveras om ej annat sägs. Ställ upp modell när det behövs och ange de för uträkningarna nödvändiga förutsättningarna. Skriv förståligt och använd etablerad notation.

Teoridelen skall lämnas in innan några hjälpmedel får tas fram.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev. bonuspoäng från inlämningsuppgifterna sänker gränser i motsvarande grad.

Examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.

Jour är

Lösningar till uppgifterna publiceras på webben. Se kursens hemsida. Tentamensresultat publiceras på anslagstavla i källaren i Matematiskt centrum.

— Teoridel —

1. Svaren på de tre frågorna i denna uppgift ska ej motiveras.

- (a) Antag att $P(B|A) = P(B)$. Är A och B oberoende? Svara Ja eller Nej. (1 p)
- (b) Låt $f(x) = c/x$ för $x \geq 1$. Går det att välja c så att $f(x)$ blir en täthet för någon stokastisk variabel X ? Svara Ja eller Nej. (2 p)
- (c) Antag att du i en analys av ett stickprov beräknade konfidensintervallet (0.03, 1.05) för den skattade storheten μ . Konfidensgraden var ca 95%. Nu säger din kollega: "Detta bevisar att μ är icke-negativ." Hur stor är risken att han har fel? Svara med ett %-tal. (1 p)

2. I förarbetet till en analys av en indistritomts föroreningsstruktur enades man om att det troligaste är att ca 65% av tomten är förorenad av för höga halter kadmium. Säkerheten i denna gissning bedömdes till att motsvara den man får av ett stickprov omfattande 5 st oberoende $\{0, 1\}$ -observationer, där 0 betyder ingen förorening och 1 förorening,

- (a) Ange en lämplig a priori-fördelning för den förorenade proportionen p_{Cd} , att användas i den fortsatta analysen. (1 p)

I de 7 st oberoende prover man bestämde sig för att ta, fann man för höga halter av kadmium i 5.

- (b) Beräkna a posteriori-fördelning för p_{Cd} . (2 p)
- (c) Beräkna a posteriori-skattningen av p_{Cd} . (1 p)

3. Antag att lastöverskridande i genomsnitt sker 3 gång på 250 dagar och enligt en Poissonprocess. Man önskar veta sannolikheten att det under en tidsperiod om 250 dagar sker 1 överskridande under den första 100-dagarsperioden och 2 st under de därpå följande 150 dagarna. (a) Beräkna denna sannolikhet och (b) dividera med sannolikheten att det totalt sker 1 överskridanden under 250 dagarsperioden. (3 p)

— Problemdel —

4. I den s.k POT-modellen förekommer Pareto-fördelningen, vars täthet är

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{u_T} \left(\frac{x}{u_T} \right)^{-\alpha} \quad \text{för } x \geq u_T > 0$$

Återkomstnivån x_N definieras av att den återkommer i snitt 1 gång på N dagar (vi låter tidsenheten vara dagar i denna uppgift). Den beror av hur ofta nivån u_T överskrides och värdet av α . Antag att tidpunkterna då nivån u_T överskrids följer en Poissonprocess med intensitet λ_T impulser per dag. Härled ett uttryck för hur x_N beror av λ_T , α och u_T . (4 p)

5. Eskil och Nils spelar ett spel som är sådant att $P(\text{Eskil vinner}) = 1 - P(\text{Nils vinner}) = 1/3$. Om Eskil satsar 1 kr, hur mycket skall Nils ska satsa för att spelet ska bli rättvist? (3 p)

6. Icke tillåtna utsläpp av ett förorenande ämne antas ske enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda \approx 20$ st per år. Om x är mängden i μg som släpps ut vid ett givet utsläppstillfälle, så blir saneringskostnaden $y \approx \alpha x + \beta$, där $\alpha \approx 10$ kSEK/ μg och $\beta \approx 50$ kSEK. Vi antar att utsläppsmängderna x är oberoende och lognormalfördelade med parametrar $\mu \approx 1.0$ och $\sigma \approx 1.1$. Beräkna riskkostnaden. Genom att investera 7200 kSEK kan man få ned utsläppsintensiteten till $\lambda \approx 2$ st per år. Hur många år tar det innan denna investering blir ekonomiskt lönsam? Ledning: Väntevärdet av en lognormalfördelad variabel är $e^{\mu + \sigma^2/2}$. (4 p)

7. I en artikel i en tidskrift om arbetsergonomi diskuteras en liten studie av max vikt lyft per minut. Följande data redovisades:

25.8, 36.6, 26.3, 21.8, 27.2

(enheten är kg). Antag att data består av oberoende observationer från en $N(\mu, \sigma)$ -fördelning. Punkt- och intervallskatta μ . Önskad konfidensgrad: 0.95. Beräkningshjälp: $n = 5$, $\bar{x} = 27.54$, $s = 5.471$. (4 p)

8. En metallurg gjorde fyra mätningar i syfte att bestämma en manganlegerings smältpunkt. Följande värden erhöles (enhet $^{\circ}\text{C}$):

1269, 1271, 1263, 1265

Låt μ beteckna legeringens smältpunkt.

- (a) Testa hypotesen $H_0 : \mu \leq 1262$ mot $H_1 : \mu > 1262$. Kan H_0 förkastas på nivån 0.10? (3 p)

- (b) Ange vilka förutsättningar du behöver ha uppfyllda för att lösa deluppgiften ovan. (1 p)

Lycka till!

TMS055 Matematisk statistik V2, onsdag 18 augusti 2004 e V

Anvisningar

Tentamen består av en teoridel med 3 uppgifter och en problemdel med 5 uppgifter. Teoriuppgifterna ska besvaras först. Inga hjälpmedel är tillåtna på denna del. På problemdelen är räknedosa inkl manual, Beta och någon av de läroböcker i matematisk statistik som används på Chalmers tillåtna hjälpmedel. Tillåtna hjälpmedel är även de fyra häftena Introduktion till stokastisk simulering, Bayesiansk uppdatering av sannolikhetsskattningar, Poissonprocessen och extrema laster samt Något om riskkostnader. Det är tillåtet med anteckningar i läroboken och i häftena. Inga andra anteckningar är tillåtna.

Kom ihåg att att alla svar skall motiveras om ej annat sägs. Ställ upp modell när det behövs och ange de för uträkningarna nödvändiga förutsättningarna. Skriv förståeligt och använd etablerad notation.

Teoridelen skall lämnas in innan några hjälpmedel får tas fram.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev. bonuspoäng från inlämningsuppgifterna sänker gränser i motsvarande grad.

Jour är Oskar Sandberg, tel. 772 5336. Examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.

Lösningar till uppgifterna publiceras på webben. Se kursens hemsida. Tentamensresultat publiceras på anslagstavla i "suckarnas gång" (källaren i Matematiskt centrum).

— Teoridel —

1. Svaren på de fyra frågorna i denna uppgift ska ej motiveras.

- (a) Antag att $P(A) = 0.63$, och att $P(B) = 0.31$. Kan A och B vara ömsesidigt uteslutande? (1 p)
- (b) Är funktionen $f(x) = 3e^{-x/3}$ täthet för någon kontinuerlig stokastisk variabel med utfallsrum $x > 0$? (1 p)
- (c) I en undersökning av tiden t_0 tills korrosionen gör en viss plåtkvalitet oanvändbar erhöles med den ungefärliga konfidensen 95% att $t_0 \geq 7.3$ år. Hur stor är risken att det i verkligheten gäller att $t_0 < 7.3$ år? (1 p)
- (d) Stopp i en viss industriell process inträffar i snitt 8 gånger per år. Man räknar med att ett stopp i snitt orsakar en merkostnad om ca 1.25 Mkr (miljoner kr). Hur stor är riskkostnaden? (1 p)

2. Låt A, B vara händelser. Visa att $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$. (4 p)

3. Täthetsfunktionen för en Paretofördelad stokastisk variabel X , som bara antar värden ≥ 5 , är

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{5} \left(\frac{x}{5}\right)^{-\alpha}$$

för $x \geq 5$.

- (a) Punktskatta α m h a följande 8 oberoende observationer: 6.85, 5.11, 5.61, 5.28, 6.87, 6.40, 5.16, 5.12. (3 p)
- (b) Ungefär hur stor är sannolikheten $p = P(X > 6.75)$. (1 p)

(Vänd!)

— Problemdel —

4. Låt X vara exponentialfördelad med väntevärde $\mu = 5$. Hur stor är den 70:e percentilen i X 's fördelning. (3 p)
5. Tabellen nedan ger sannolikheterna (sånär som på en) för de möjliga utfallen av en två-dimensionell diskret stokastisk variabel (X, Y) , sådan att $0 \leq X \leq 4$ och $0 \leq Y \leq 3$.

		Y			
		0	1	2	3
X	0	.08	.07	.04	.00
	1	.06	.15	.05	.04
	2	.05	?	.10	.06
	3	.00	.01	.05	.06
	4	.00	.01	.05	.06

- (a) Beräkna $P(X = 2, Y = 1)$? (1 p)
- (b) Beräkna $P(X = 2)$. (1 p)
- (c) Beräkna $P(Y = 1)$. (1 p)
- (d) Avgör, endast m.h.a svaren på de tre deluppgifterna ovan, om X och Y kan vara oberoende? (1 p)
6. Varje dag görs en oberoende upprepning av ett visst försök i vilket man observerar huruvida en viss händelse A inträffar eller ej. Spelföretaget Justa Spel AB har studerat historiska utfall och kommit fram till att A i snitt inträffar ungefär 1 gång på 5 försök, d.v.s $P(A) \approx 1/5 = 0.2$. Man erbjuder dagligen spel på att A inträffar till oddset 3.5/1, vilket innebär att om du satsar 10 kr på att A ska inträffa, så vinner du 35 kr om A inträffar och förlorar 10 kr om A ej inträffar. I Sverige brukar spelarrangörer då ange oddset till 4.5, vilket ska tolkas så här: om du köper en spelbong för 10 kr, så kan du lösa in den för 45 kr om A inträffar och om A förlorar är den värdelös.
- (a) Antag att en viss dag 100 spelare satsar 10 kr var på att A ska inträffa. Hur stor är Justa Spel AB:s förväntade vinst? (1 p)
- (b) Antag att en spelare under 100 dagar varje dag satsar 10 kr på att A ska inträffa. Hur mycket kan man förvänta sig att Justa Spel AB vinner av spelaren? (1 p)
- (c) Vilket är det rättvisa oddset? (1 p)
- I svaret på sista deluppgiften ovan får du ange oddset på det sätt du tycker är naturligast, men se till så att den som rättar förstår vad du menar.
7. I syfte att uppskatta produktionskostnaden av en viss teknisk kemikalie, tillverkades 10 försöksserier om 10 liter. Kostnaden för dessa var 10.50, 11.00, 10.80, 9.70, 9.90, 10.40, 11.20, 10.30, 9.80 och 10.50 USD/liter. Punkt- och intervallskatta den förväntade literkostnaden μ . Önskad konfidensgrad: ca 99%. (4 p)
8. En ingenjör ska medelst provtagning avgöra hur stor sannolikheten θ är att ett visst gränsvärde överstigs. Hon gör därför 12 mätningar (som vi ska anta är oberoende upprepningar av försöket att bestämma en viss halt av någon förorening). I 4 av mätningarna överstegs gränsvärdet. Bestäm ingenjörens trolighetsskattning (m a p à posteriori-fördelningen) av sannolikheten θ , om hon
- (a) ej har någon förhandskunskap, (2 p)
- (b) tidigare gjort 4 mätningar, varav gränsvärdet överstegs i en. (2 p)

TMS055 Matematisk statistik V2, 27 maj 2004 e V

Anvisningar

Tentamen består av en teoridel med 3 uppgifter och en problemdel med 5 uppgifter. Teoriuppgifterna ska besvaras först. Inga hjälpmedel är tillåtna på denna del. På problemdelen är räknedosa inkl manual, Beta och någon av de läroböcker i matematisk statistik som används på Chalmers tillåtna hjälpmedel. Tillåtna hjälpmedel är även de fyra häftena Introduktion till stokastisk simulering, Bayesiansk uppdatering av sannolikhetsskattningar, Poissonprocessen och extrema laster samt Något om riskkostnader. Det är tillåtet med anteckningar i läroboken och i häftena. Inga andra anteckningar är tillåtna.

Kom ihåg att att alla svar skall motiveras om ej annat sägs. Ställ upp modell när det behövs och ange de för uträkningarna nödvändiga förutsättningarna. Skriv förståligt och använd etablerad notation.

Teoridelen skall lämnas in innan några hjälpmedel får tas fram.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev. bonuspoäng från inlämningsuppgifterna sänker gränser i motsvarande grad.

Jour är Oskar Sandberg, tel. 772 5336. Examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.

Lösningar till uppgifterna publiceras på webben. Se kursens hemsida. Tentamensresultat publiceras på anslagstavla i "suckarnas gång" (källaren i Matematiskt centrum).

— Teoridel —

1. Svaren på de fyra frågorna i denna uppgift skall ej motiveras.

- (a) Antag att $P(A|B) = 0.75$ och $P(A) = 0.75$. Är A och B oberoende? (1 p)
- (b) Låt $X \sim N(\mu, \sigma)$. Är $E[X] = \mu$? (1 p)
- (c) Antag att $\hat{\theta}$ är en punktskattning, baserad på n observationer, av parametern θ . Vad innebär det att $\hat{\theta}$ är väntevärdesriktig? (1 p)
- (d) Antag att data vid test av nollhypotesen $H_0 : \mu \leq 0$ mot $H_1 : \mu > 0$ hade P -värdet 0.034. Kan du då förkasta H_0 på någon av nivåerna 5%, 1% eller 0.1%? Ange isåfall vilken. (1 p)

2. Visa, för två godtyckliga händelser A, B att

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')} \quad (4 \text{ p})$$

3. Beta(p, q)-fördelningens täthet är

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \theta^{p-1} (1-\theta)^{q-1} \quad \text{för } 0 < \theta < 1$$

där Γ betecknar gammafunktionen. Vilket är det troligaste värdet? (3 p)

(Vänd!)

— Problemdel —

4. Kadmium är ett ämne man inte gärna vill ha i jorden p.g.a dess giftighet. Antag att halten kadmium på en viss nedsmutsad f.d fabriksomt är lognormalfördelad med parametrar $\mu = 2.75$ och $\sigma = 2.0$. Bestäm sannolikheten att man vid en mätning av halten erhåller ett mätvärde större än 2.0. (3 p)
5. Under 240 minuter registreras 38649 radioaktiva sönderfall. Räknaren registrerar samtliga sönderfall. Kan man med konfidensen minst ca 95% påstå att dessa data "bevisar" att sönderfallsintensiteten λ är större än 160 st/minut? (3 p)
6. Vid 6 oberoende bestämningar av halten kadmium på en viss nedsmutsad f.d fabriksomt erhölls

3.9 87.0 192.1 0.6 0.9 49.0

Antag att dessa data är $LN(\mu, \sigma)$ -fördelade. Tomten betraktas som förorenad om $e^\mu > 12.5$. Beräkna ett ca 95% konfidensintervall för μ och omvandla det till ett konfidensintervall för e^μ . (4 p)

7. Betrakta en Poissonprocess N_t med intensitet $\lambda = 1.5$ impulser per vecka. Beräkna sannolikheten för händelsen att både $N_2 = 1$ och $1 \leq N_6 \leq 3$ inträffar. (4 p)
8. Antag att varje impuls i Poissonprocessen från ovanstående uppgift är ett tillbud i en lastprocess av något slag och att de resp styrkorna av tillbuden är oberoende och följer en Paretofördelning, vilket innebär att om X representerar styrkan av ett godtyckligt tillbud, så är X 's täthet

$$f(x|T) = \frac{\alpha}{x_T} \left(\frac{x_T}{x} \right)^{\alpha+1} \quad \text{för } x > x_T$$

där tillbudsnivån $x_T = 12$ och man vet att $\alpha \approx 5.0$. Ett tillbud av styrkan $X > x_T$ beräknas kosta ca $16X$ kSEK. Beräkna den riskkostnad som tillbuden ger upphov till. (4 p)

Lycka till!

NTM010 Matematisk statistik för fysiker, 26 maj 2004 f V

Anvisningar

Tentamen består av en teoridel med 3 uppgifter och en problemdel med 5 uppgifter. Teoriuppgifterna ska besvaras först. Inga hjälpmedel är tillåtna på denna del. På problemdelen är räknedosa inkl manual, Beta och någon av de läroböcker i matematisk statistik som används på Chalmers tillåtna hjälpmedel. Tillåtna hjälpmedel är även de fyra häftena Introduktion till stokastisk simulering, Bayesiansk uppdatering av sannolikhetsskattningar, Poissonprocessen och extrema laster samt Något om riskkostnader. Det är tillåtet med anteckningar i läroboken och i häftena. Inga andra anteckningar är tillåtna.

Kom ihåg att att alla svar skall motiveras om ej annat sägs. Ställ upp modell när det behövs och ange de för uträkningarna nödvändiga förutsättningarna. Skriv förståeligt och använd etablerad notation.

Teoridelen skall lämnas in innan några hjälpmedel får tas fram.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev. bonuspoäng från inlämningsuppgifterna sänker gränser i motsvarande grad.

Jour är Oskar Sandberg, tel. 772 5336. Examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.

Lösningar till uppgifterna publiceras på webben. Gå till <http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/Chalmers/TMS055/> och klicka på "Läsårets tentor..." Tentamensresultat publiceras på anslagstavla i fysikhuset.

— Teoridel —

1. Svaren på de fyra frågorna i denna uppgift skall ej motiveras.

(a) Antag att $P(A|B) = 0.75$ och $P(A) = 0.73$. Är A och B oberoende? (1 p)

(b) Låt $X \sim N(\mu, \sigma)$. Är $\text{Var}[X] = \sigma$? (1 p)

(c) Antag att $\hat{\theta}$ är en punktskattning, baserad på n observationer, av parametern θ . Vad innebär det att $\hat{\theta}$ är konsistent? (1 p)

(d) Antag att data vid test av nollhypotesen $H_0 : \mu \leq 0$ mot $H_1 : \mu > 0$ hade P -värdet 0.057. Kan du då förkasta H_0 på någon av nivåerna 5%, 1% eller 0.1%? Ange isåfall vilken. (1 p)

2. Visa, för två godtyckliga händelser A, B , att

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4 \text{ p})$$

3. Exponentialfördelningens täthet är

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{för } x > 0$$

Beräkna medianen. (3 p)

(Vänd!)

— Problemdel —

4. Fotografier från Nasas Mars-sond överföres till jorden av en digital länk, där varje informationsenhet är en bit (en etta 1 eller nolla 0). Vi ska studera en sådan informationsenhet. Låt $S \in \{0, 1\}$ beteckna det som sonden sänder och låt $M \in \{0, 1\}$ beteckna det som mottages på jorden. Oftast är $M = S$, men ibland blir det fel p.g.a störningar i överföringen. Genom att beordra sonden att sända en testbild, kan man mäta sig fram till att

$$P(M = 1|S = 1) = 0.97 \quad \text{och} \quad P(M = 0|S = 0) = 0.99$$

Man vet också att typiska bilder från Mars innehåller 55% ettor och 45% nollor. Antag nu att man i ett visst ögonblick har mottagit en etta. Beräkna den betingade sannolikheten att sonden sände en etta. (4 p)

5. Under 240 minuter registreras 38649 radioaktiva sönderfall. Räknaren registrerar samtliga sönderfall. Punkt- och intervallskatta sönderfallsintensiteten λ (tidsenhet: minut). Önskad konfidsgrad: 95%. (3 p)

6. Vid 6 oberoende bestämningar av halten kadmium på en viss nedsmutsad f.d fabriksomt erhöles

3.9 87.0 192.1 0.6 0.9 49.0

Antag att dessa data är $LN(\mu, \sigma)$ -fördelade. Tomten betraktas som förorenad om $e^\mu > 2$. Testa om så verkar vara fallet. Konfidensen i ett ev positivt svar ska vara minst ca 95%. (4 p)

7. Betrakta en Poissonprocess N_t med intensitet $\lambda = 0.5$ impulser per vecka. Beräkna sannolikheten för händelsen att både $N_2 = 1$ och $1 \leq N_6 \leq 3$ inträffar. (4 p)
8. Antag att varje impuls i Poissonprocessen i ovanstående uppgift är ett tillbud i en lastprocess av något slag och att de resp styrkorna av tillbuden är oberoende och följer Paretofördelningen given av att

$$P(X > x|T) = \left(\frac{x_T}{x}\right)^\alpha$$

där tillbudsnivån $x_T = 12$ och man vet att $\alpha \approx 5.0$. Ett tillbud betraktas som allvarligt om dess styrka överstiger nivån $x_A = 30$. Beräkna genomsnittlig återkomsttid för allvarliga tillbud. Beräkna slutligen den nivå som i genomsnitt återkommer en gång per år. Räkna då med att ett år består av 52 veckor. (4 p)

Lycka till!

- (a) Ja, (b) Nej och (c) $\leq 5\%$
- (a) Om vi i $n = 5$ tänkta oberoende försök erhållit 3.25 st förorenade, så blir à priori-skattningen av p_{Cd} precis $3.25/5 = 0.65$. Således gäller att $p(p_{Cd}) \propto p_{Cd}^{3.25} (1 - p_{Cd})^{1.75}$ definierar en lämplig à priorifördelning. Detta är en betafördelning med parametrar 4.25 och 2.75. (b) och (c) Efter det att mätningarna har gjorts har vi totalt $5+7 = 12$ mätningar i vilka vi har funnit förorening i $3.25 + 5 = 8.25$. Således gäller att $p(p_{Cd}|x) \propto p_{Cd}^{8.25} (1 - p_{Cd})^{3.75}$ definierar en lämplig à posteriorifördelning. À posteriorifördelningen är alltså beta med parametrar 9.25 och 4.75. Motsvarande à posterioriskattning är $\hat{p}_{Cd} = 8.25/12 = 0.6875$.

- Vi har att lastöverskridande sker enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 3/250$ st per dag. (a) Den sökta sannolikheten är produkten av $e^{-100 \cdot 3/250} (100 \cdot 3/250)^1 / 1! = 0.361$ och $e^{-150 \cdot 3/250} (150 \cdot 3/250)^2 / 2! = 0.268$. Vi får $0.361 \cdot 0.264 = 0.0968$. (b) Vi ska dividera med $e^{-250 \cdot 3/250} (250 \cdot 3/250)^1 / 1! = 0.149$ och erhåller $0.0968/0.149 = 0.648$. I tesen råkade det bli ett tryckfel i denna uppgiften. Min tanke var att man skulle dividera med sannolikheten att det totalt skedde 3 lastöverskridanden under de aktuella 250 dagarna. Denna sannolikhet är $e^{-250 \cdot 3/250} (250 \cdot 3/250)^3 / 3! = 0.224$ och efter division skulle man erhålla $0.0968/0.224 = 0.432$, vilket kan tolkas som en betingad sannolikhet.

- Här ska man använda sig av det nedladdade häftet Poissonprocessen och extrema laster. Låt X vara ett typiskt överskridande av nivån u_T . Då har X den i tesen angivna Pareto-tätheten

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{u_T} \left(\frac{x}{u_T} \right)^{-\alpha} \text{ för } x \geq u_T$$

Vi behöver

$$P(X > x) = \left(\frac{x}{u_T} \right)^{1-\alpha} \text{ för } x \geq u_T$$

(Detta görs i häftet i specialfallet $u_T = 5$.) Vårt krav på x_N innebär att

$$P(X > x_N) = \frac{1}{\lambda_T N}$$

(j.f.r häftet). Häur fås med elementära omskrivningar att

$$x_N = u_T (\lambda_T N)^{1/(\alpha-1)}$$

Obs att hela argumenteringen förutsätter att $N \geq 1/\lambda_T$. Något annat vore konstigt.

- Eskils odds är 2/1. Således ska Nils satsa två kronor om Eskil satsar en.
- Här är det lämpligt att plocka fram häftet Något om riskkostnader. Vi får reda på den typiska utsläppsmängden X är lognormalfördelad med parametrar $\mu \approx 1.0$ och $\sigma \approx 1.1$. Enl ledningen gäller att $E[X] \approx e^{1.0+1.1^2/2} \approx 4.98 \approx 5.0$. Riskkostnaden blir således $\lambda(\alpha E[X] + \beta) \approx 2000$ kSEK/år. Om investeringen görs, blir riskkostnaden istället 200 kSEK/år (λ reduceras ju då med en faktor 10). Om inget görs blir den förväntade kostnaden för n år approximativt lika med $2000n$ och om investeringen görs blir motsvarande kostnad approximativt $7200 + 200n$. Löser vi ut n ur $7200 + 200n \leq 2000n$ fås $n \geq 4$. Således gäller att investeringen blir lönsam efter ca 4 år.
- Ur t -tabell (4 frihetsgrader) fås $t_{0.025} = 2.776$. Således gäller att utsagan

$$\mu = \bar{x} \pm t_{0.025} s / \sqrt{n} = 27.54 \pm 6.79, \text{ som ju är ekvivalent med } 20.75 \leq \mu \leq 34.33,$$

har konfidensen 95%.

- Här får vi själva räkna ut att $\bar{x} = 1267$, $s = 3.6515$. Ur t -tabell (3 frihetsgrader) hämtar vi $t_{0.10} = 1.638$. Vi ser nu att

$$\frac{\bar{x} - 1262}{s/\sqrt{n}} > 1.638$$

Vi kan alltså (a) förkasta $H_0 : \mu \leq 1262$ till förmån för $H_1 : \mu > 1262$ på nivån 10%. (b) Vi behöver veta att mätningarna är oberoende, normalfördelade och väntevärdesriktiga. Testet i (a) är ju på väntevärdet.

1. (a) Ja. (b) Nej, (c) 5%. (d) 10 Mkr/år.
2. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$
3. I häftet Poissonprocessen och extrema laster görs allt i denna uppgift. Om man väljer att skatta α med trolighetsmetoden, så fås $\hat{\alpha} = 8.105$. Med momentmetoden fås $\hat{\alpha} = 8.25$. (b) Använder man sig av skattningen i (a) fås $\hat{p} = 1.35^{1-\hat{\alpha}} = 0.119$ resp 0.113. Väljer man istället den naturliga skattningen (ant obs över 6.75)/(totala ant obs) fås $2/8 = 0.25$.
4. Fördelningsfunktionen för X är $F(x) = 1 - e^{-x/5}$, $x > 0$. Den 70:e percentilen x_{70} definieras av att $F(x_{70}) = 0.70$. Löser man denna ekvation fås att $x_{70} = -5 \ln 0.30 \approx 6.02$.
5. (a) 0.06 ty summan av alla sannolikheterna i tabellen kan bara vara 1.00. (b) $P(X = 2) = 0.05 + 0.06 + 0.10 + 0.06 = 0.27$. (c) $P(Y = 1) = 0.07 + 0.15 + 0.06 + 0.01 + 0.01 = 0.30$. (d) $P(X = 2)P(Y = 1) = 0.27 \cdot 0.30 = 0.081 \neq 0.06 = P(X = 2, Y = 1)$; X och Y kan därför ej vara oberoende.
6. (a) Med sannolikheten 0.8 vinner Justa Spel $100 \cdot 10 = 1000$ kr och med sannolikheten 0.2 förlorar Justa Spel $100 \cdot 35 = 3500$ kr. Således är den förväntade vinsten $0.8 \cdot 1000 - 0.2 \cdot 3500 = 100$ kr. (b) Varje dag i 100 dagar förväntas Justa Spel vinna $0.8 \cdot 10 - 0.2 \cdot 35 = 8 - 7 = 1$ av spelaren. Således är Justa Spels förväntade vinst 100 kr. (c) 4/1 (eller 5 gånger insatsen tillbaka), ty $0.8 \cdot 1 - 0.2 \cdot 4 = 0$. Notera att $(P(A')/P(A) = 4$.
7. Räkna först ut att $\bar{x} = 10.41$, $s = 0.5043$. I t -tabellen (9 frihetsgrader) avläser vi $P(T > 3.25) = 0.005$. (Obs: $0.005 + 0.005 = 0.01$ och $1 - 0.99 = 0.01$.) Således gäller att $\mu = 10.41 \pm 3.25 \cdot 0.5043 / \sqrt{10} = 10.41 \pm 0.52$ USD/liter.
8. Här har vi teori i Bayes-häftet att luta oss emot. Vi får (a) $\hat{\theta} = 4/12 = 1/3 \approx 0.33$ och (b) $\hat{\theta} = (1+4)/(4+12) = 5/16 = 0.3125$.

1. (a) Ja (b) Ja (c) Att $E[\hat{\theta}] = \theta$ (d) Ja, på nivån 5%
2. Notera först att $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Resultatet som ska visas, som kallas Bayes formel, följer av $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ och $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$.
3. $d \ln f(\theta)/d\theta = (p-1)/\theta - (q-1)/(1-\theta) = 0 \Rightarrow \theta = (p-1)/(p+q-2)$. Att $f(\theta)$ är maximal då $\theta = (p-1)/(p+q-2)$ inses t.ex genom att man kollar att andraderivatan är < 0 .
4. $P(X > 2) = P(\ln X > \ln 2) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln 2 - 2.75}{2}\right) = 1 - \Phi(-1.03) = \Phi(1.03) = 0.8485 \approx 0.85$
5. Notera först att observationerna är $\text{Poi}(\lambda)$ -fördelade och $n = 240$ st, samt att vi får reda på att $\sum_i x_i = 38649$. Vi kan alltså räkna ut medelvärde $\bar{x} = 38649/240 = 161.04$. Detta värde skattar sönderfallsintensiteten λ eftersom $\mu = \lambda$. Vidare gäller att $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Vi har därför att $s \approx \sqrt{\bar{x}} = 12.69$. Vi ska testa nollhypotesen $H_0 : \lambda \leq 160$ mot alternativet $H_1 : \lambda > 160$. Teststatistikan

$$z = \frac{\bar{x} - 160}{s/\sqrt{n}} = 1.267$$

En titt i t.ex $t(\infty)$ -tabellen ger att P -värdet är större än 0.10. Man kan alltså inte påstå med konfidensen ca 95% eller mer att $\lambda > 160$.

6. Logga data och räkna ut att $\bar{x} = 2.3934$ och $s = 2.4694$. Antalet observationer $n = 6$. En titt i $t(5)$ -tabellen ger att konfidensintervallet för μ är $\bar{x} \pm 2.571s/\sqrt{n} = 2.393 \pm 2.592$ eller $(-0.1985, 4.9854)$ vilket omvandlas till $e^\mu \in (0.82, 146.26)$.
7. Notera först $P(N_2 = 1, 1 \leq N_6 \leq 3) = P(N_2 = 1, 0 \leq N_6 - N_2 \leq 2) = P(N_2 = 1)P(0 \leq N_6 - N_2 \leq 2)$. I en Poissonprocess är ju allt som händer i disjunkta tidsintervall oberoende. Dessutom gäller ju att $N_t - N_s \sim \text{Poi}(\lambda(t-s))$ om $s < t$. Härur fås $P(N_2 = 1) = e^{-3} 3^1/1! = 0.1494$ och $P(0 \leq N_6 - N_2 \leq 2) = e^{-6} 6^0/0! + e^{-6} 6^1/1! + e^{-6} 6^2/2! = e^{-6} \cdot 25 = 0.06197$. Således gäller $P(N_2 = 1, 1 \leq N_6 \leq 3) = 0.1494 \cdot 0.06197 = 0.00925$.
8. Riskkostnaden är $R = \lambda_T C_T$, där $\lambda_T = 1.5$ tillbud per vecka och $C_T = E[16X|T] = 16 \int_{x_T}^{\infty} x \frac{\alpha}{x_T} \left(\frac{x_T}{x}\right)^{\alpha+1} dx = 16 \frac{\alpha}{\alpha-1} x_T = 16(5/4)12 = 16 \cdot 15 = 240$ kSEK. Således är $R = 1.5 \cdot 240 = 360$ kSEK per vecka.

1. (a) Nej (b) Nej (c) Att $P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) \rightarrow 0$ för varje $\epsilon > 0$ (d) Nej
2. Vi får först $P(A \cup B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$. Notera nu att $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. Härur fås $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, v.s.v.
3. Medianen m definieras av att $\int_0^m f(x) dx = 0.5$. För exponentialfördelningen gäller att $\int_0^m f(x) dx = \int_0^m \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda m}$. Medianen uppfyller således $e^{-\lambda m} = 0.5 \Rightarrow -\lambda m = \ln 0.5 = -\ln 2 \Rightarrow m = (\ln 2)/\lambda$.
4. $P(S = 1|M = 1) = P(S = 1)P(M = 1|S = 1)/P(M)$, där $P(M) = P(S = 1)P(M = 1|S = 1) + P(S = 0)P(M = 1|S = 0) = 0.55 \cdot 0.97 + 0.45 \cdot 0.01 = 0.538$. Således gäller $P(S = 1|M = 1) = 0.5335/0.538 = 0.992$.
5. Notera först att antalet sönderfall under en minut är $\text{Poi}(\lambda)$ -fördelat, där λ är sönderfallsintensiteten. Eftersom $\mu = \lambda$ skattar vi λ med $\bar{x} = 38649/240 = 161.04$. I uttrycket för konfidensintervallet, som är $\mu = \bar{x} \pm 1.96s/\sqrt{n}$, har vi värdena $\bar{x} = 161.04$ och $n = 240$, men s saknas. I $\text{Poi}(\lambda)$ -modellen gäller att $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Vi kan därför ansätta att $s \approx \sqrt{\bar{\lambda}} = 12.690$. Konfidensintervallet för λ blir därför approx 161.04 ± 1.61 eller $(159.43, 162.65)$.
6. Logaritmera data. beräkna sedan $\bar{x} = 2.3934$ och $s = 2.4694$. Notera sedan att $e^\mu > 2.0 \Leftrightarrow \mu > \ln 2 = 0.693$. Vi ska alltså testa nollhypotesen $\mu \leq 0.693$ mot alternativet $H_1 : \mu > 0.693$. Teststatistikan, som är t -fördelad med 5 frihetsgrader är

$$t = \frac{\bar{x} - 0.693}{s/\sqrt{n}} = 1.68$$

En titt i en lämplig t -tabell (obs 5 frihetsgrader) ger att P -värdet ligger mellan 0.05 och 0.10. Vi kan således inte förkasta H_0 på någon nivå ≤ 0.05 . M.a.o, data stöder inte hypotesen att tomten är förorenad.

7. Notera först $P(N_2 = 1, 1 \leq N_6 \leq 3) = P(N_2 = 1, 0 \leq N_6 - N_2 \leq 2) = P(N_2 = 1)P(0 \leq N_6 - N_2 \leq 2)$. I en Poissonprocess är ju allt som händer i disjunkta tidsintervall oberoende. Dessutom gäller ju att $N_t - N_s \sim \text{Poi}(\lambda(t - s))$ om $s < t$. Härur fås $P(N_2 = 1) = e^{-1} 1^1/1! = 0.3679$ och $P(0 \leq N_6 - N_2 \leq 2) = e^{-2} 2^0/0! + e^{-2} 2^1/1! + e^{-2} 2^2/2! = e^{-2} \cdot 5 = 0.6767$. Således gäller $P(N_2 = 1, 1 \leq N_6 \leq 3) = 0.3679 \cdot 0.6767 = 0.249$.
8. Genomsnittlig återkomsttid för tillbud är $1/\lambda_T = 2$ veckor, ty $\lambda_T = 0.5$. Genomsnittlig återkomsttid för allvarliga tillbud är $1/\lambda_A = 195.3$ veckor, ty $\lambda_A = \lambda_T P(A|T) = 0.00512$ där $P(A|T) = (x_A/x_T)^\alpha 0.4^5 = 0.01024$. Årsnivån är $x_{52} = 23.02$ (lös x_{52} ur $\lambda_T P(X > x_{52}|T) = 1/52$).