TMS055 Matematisk statistik V2, 3 p, 17 januari 2007 em V

Anvisningar

Tentamen består av en teoridel med 3 uppgifter och en problemdel med 5 uppgifter. Teoriuppgifterna ska besvaras först. Inga hjälpmendel är tillåtna på denna del. På problemdelen är räknedosa inkl manual, Beta och någon av de läroböcker i matematisk statistik som används på Chalmers tillåtna hjälpmedel. Tillåtna hjälpmedel är även de fyra häftena Introduktion till stokastisk simulering, Bayesiansk uppdatering av sannolikhetsskattningar, Poissonprocessen och extrema laster samt Något om riskkostnader samt föreläsningsanteckningarna som kan laddas ner ifrån kurshemsidan. Det är tillåtet med rimligt omfattande anteckningar i läroboken och i nedladdade häften. Inga andra anteckningar är tillåtna.

Kom ihåg att att alla svar skall motiveras såvida ej annat sägs. Ställ upp modell när det behövs och ange de för uträkningarna nödvändiga förutsättningarna. Skriv förståligt och använd etablerad notation.

Teoridelen skall lämnas in innan några hjälpmedel får tas fram.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev. bonuspoäng från inlämningsuppgifterna sänker gränser i motsvarande grad.

Examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.Tommy går att nås per mobiltelefon under tentamen. Ingen jour således.

Lösningar till uppgifterna publiceras på webben. Se kursens hemsida. Rättningsprotokoll anslås i MV:F, plan 2.

— Teoridel —

1. För rökdetektorn på min brors kontor gäller att den betingade sannolikheten för larm är 0.99 givet att det brinner och 0.02 givet att det ej brinner. Att den kan larma även om det ej brinner beror på personalens aktiviteter. T.ex händer det att man steker pannkakor i lunchrummet. Antag att sannolikheten för brand är 0.01. Hur stor är då den betingade sannolikheten att det brinner givet att detektorn larmar. (4 p)

2. Antag att den stokastiska variabeln X är kontinuerligt fördelad med fördelningsfumnktion $F(x)$ och täthet $f(x) = F'(x)$. Visa att då är den stokastiska variabeln $U = F(X)$ likformigt fördelad på enhetsintervallet $(0, 1)$. (4 p)

3. (a) Är medelvärdet en resistent skattning av väntevärdet (svara ja eller nej)? (1 p)

   (b) Är s en väntevärdesriktig skattning av σ (svara ja eller nej)? (1 p)

   (c) Skriv upp (utan motivering) en formel för approximativ beräkning av ett 95% konfidensintervall för väntevärdet μ, under antagandet att antalet observationer är stort. (1 p)

   (d) Vad ska gälla för att en funktion $f(x)$ ska vara en täthet för en kontinuerlig stokastisk variabel? (1 p)

— Problemdel —

4. Antag att tiden T till fel är exp(λ)-fördelad med $\lambda = 2.74 \cdot 10^{-3}$ fel per dygn. Beräkna (a) förväntad tid till fel och (b) sannolikheten att fel uppträder inom 1 år. (3 p)

5. För x, y-data given på formen $n = 100$, $\sum_i x_i = 23$, $\sum_i x_i^2 = 23$, $\sum_i y_i = 15$, $\sum_i y_i^2 = 15$ och $\sum_i x_i y_i = 10$, beräkna

   (a) medelvärde och standardavvikelse för x-variabeln (2 p)

   (b) korrelationen mellan x- och y-variablerna (2 p)

6. Man skulle skatta en sannolikhet $p = P(A)$ med ett litet antal oberoende försök, och ville utnyttja den kunskap om p som redan fanns. Antag att man gjorde 3 försök och att A inträffade i ett av dessa. Om beta$(3, 7)$ valdes till á priori-täthet för p, vilken är då p:s á posterioritäthet? (3 p)

7. En viss typ av olyckor inträffar med intensiteten $\lambda = 2.74 \cdot 10^{-3}$ per dygn. Kostnaden x för en sådan olycka är Paretofördelad med parametrar $\alpha = 3$ och $u = 10$. För undvikande av missförstånd, x:s täthet är alltså

$$f(x) = \frac{\alpha}{u}\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha+1} \quad \text{för} \quad x > u$$

   Enheten för x är 10 000 kr. Det minsta en olycka kan kosta är alltså 100 000 kr. Bestäm den s.k 10-årskostnaden. (4 p)

8. I ett jordprov gjordes upprepade mätningar av halten arsenik. Följande halter erhölls:

   11.93 11.94 11.89 12.07 12.04 12.07 11.85

   Enhet: mg per kg torrsubstans. Antag att detta är oberoende N(μ, σ)-observationer.

   (a) Punkt och intervallskatta μ. Konfidensgrad: 95%. (2 p)

   (b) Testa nollhypotesen $H_0 : \sigma \geq 0.1$ mot alternativet $H_1 : \sigma < 0.1$. Nivå: 10%. (2 p)

   Räknehjälp: $\sum x = 83.79$, $\sum x^2 = 1003.0146$.

Lycka till!

Svar eller kortfattade lösningar till TMS055 Matematisk statistik V2 den 17/1-07

1. Låt B beteckna händelsen att det brinner och L att detektorn larmar. Med Bayes formel fås

$$P(B|L) = \frac{P(B)P(L|B)}{P(B)P(L|B) + P(B')P(L|B')} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.02} \approx 0.333$$

2. $U = F(X)$ tar sina värden ur enhetsintervallet och har fördelningsfunktionen

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F\left(F^{-1}(u)\right) = u$$

Således gäller att tätheten är $f_U(u) = F'_U(u) = 1$ för $u \in (0, 1)$. QED

3. (a) Nej
   (b) Nej
   (c) $\mu = \bar{x} \pm 2s/\sqrt{n}$ eller $\mu = \bar{x} \pm 1.96s/\sqrt{n}$
   (d) $f(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

4. (a) $\mu = 1/\lambda \approx 365$ dygn eller 1 år.
   (b) $1 - e^{-2.74 \cdot 10^{-3} \cdot 365} \approx 1 - e^{-1} = 0.632$

5. (a) $\bar{x} = 23/100 = 0.23$, $99s_x^2 = 23 - 23^2/100 = 17.71 \Rightarrow s_x \approx 0.423$
   (b) $S_{xx} = 23 - 23^2/100 = 17.71$, $S_{yy} = 15 - 15^2/100 = 12.75$, $S_{xy} = 10 - 23 \cdot 15/100 = 6.55 \Rightarrow$ $\rho = 6.55/\sqrt{17.71 \cdot 12.75} \approx 0.436$

6. Vi använder att á posterioritätheten är beta(α+x, β+n−x) om á prioritätheten är beta(α, β) och $x|n, p \sim$ bin(n, p). Detta visades i häftet om Bayesiansk uppdatering. Således är i föreliggande fall á posterioritätheten beta(4, 9).

7. Notera först att

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} f(y)\, dy = \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha}$$

Omräknad till år är intensiteten $\lambda \approx 1$, så 10-årskostnaden x_{10} uppfyller ekvationen $P(X > x_{10}) = 0.1 \Rightarrow x_{10} = u \cdot 0.1^{-1/\alpha} \approx 21.5443$. D.v.s, 215 443 kr. (Flera har bestämt mediankostnaden x_M som ges av ekvationen $P(X > x_m) = 0.5$. Detta är även 2-årskostnaden, eftersom man i snitt har 1 olycka per år, men det har man inte förstått. Vissa har bestämt förväntad kostnad och multiplicerat med 10 år. Inga poäng har delats ut för dessa lösningsförslag, eftersom de tydligt visar att tentanden inte vet hur man beräknar en återkomstnivå.)

8. Vi får $\bar{x} = 83.79/7 = 11.970$, $(n-1)s^2 = 1003.0146 - 83.79^2/7 = 0.0483 \Rightarrow s^2 = 0.0483/6 = 0.00805$ och $s = \sqrt{0.00805} \approx 0.0897$. Antalet frihetsgrader är 6 och 0.025-kvantilen i $t(6)$-fördelningen är 2.447. Det i (a) sökta konfidensintervallet är således

$$\mu = 11.970 \pm 0.0897 \cdot 2.447/\sqrt{7} = 11.970 \pm 0.083 \quad \text{eller} \quad \mu \in (11.887,\ 12.053)$$

(b) Testresultatets P-värde är ≤ 0.10 och H_0 kan förkastas på nivån 10%, om $(n-1)s^2/0.1^2 < 2.204$ (variabeln $(n-1)s^2/\sigma^2$ är ju $\chi^2(6)$-fördelad och 2.204 är 0.90-kvantilen i denna fördelning). Vi räknar ut att $(n-1)s^2/0.1^2 = 4.83$. Nollhypotesen H_0 kan alltså ej förkastas på nivån 10%.

TMS055 Matematisk statistik V2, 3 p, 23 augusti 2006 eV

Anvisningar

Tentamen består av en teoridel med 3 uppgifter och en problemdel med 5 uppgifter. Teoriuppgifterna ska besvaras först. Inga hjälpmendel är tillåtna på denna del. På problemdelen är räknedosa inkl manual, Beta och någon av de läroböcker i matematisk statistik som används på Chalmers tillåtna hjälpmedel. Tillåtna hjälpmedel är även de fyra häftena Introduktion till stokastisk simulering, Bayesiansk uppdatering av sannolikhetsskattningar, Poissonprocessen och extrema laster samt Något om riskkostnader samt föreläsningsanteckningarna som kan laddas ner ifrån kurshemsidan. Det är tillåtet med rimligt omfattande anteckningar i läroboken och i nedladdade häften. Inga andra anteckningar är tillåtna.

Kom ihåg att att alla svar skall motiveras såvida ej annat sägs. Ställ upp modell när det behövs och ange de för uträkningarna nödvändiga förutsättningarna. Skriv förståligt och använd etablerad notation.

Teoridelen skall lämnas in innan några hjälpmedel får tas fram.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev. bonuspoäng från inlämningsuppgifterna sänker gränser i motsvarande grad.

Examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.Tommy går att nås per mobiltelefon under tentamen.

Lösningar till uppgifterna publiceras på webben. Se kursens hemsida. Rättningsprotokoll anslås i MV:F, plan 2.

— Teoridel —

1. Visa för två godtyckliga händelser A och B, att
   (a) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$ (2 p)
   (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (2 p)

2. Besvara med ja eller nej följande fyra frågor.
   (a) Antag att X är binomialfördelad med parametrar $n = 3$ och $p = 3/4$. Är det sannt att $P(X = 2) = (3/4)^3$? (1 p)
   (b) Är det sannt att en normalfördelad variabel utfaller längre bort från μ än 2σ i ca 5% av fallen? (1 p)
   (c) Är medelvärdet en väntevärdesriktig skattning av väntevärdet? (1 p)
   (d) Om du läser i en statistisk undersökning att något är statistiskt säkerställt, betyder det då i allmänhet att risken att det är fel är max ca 1%? (1 p)

   Svaren skall ej motiveras.

3. Antag att du har observerat medelvärdet $\bar{x}$ och standardavvikelsen s i ett stickprov av storlek n på en variabel x, som är normalfördelad med väntevärde μ och okänd standardavvikelse σ. Härled ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$. (4 p)

— Problemdel —

4. I idrottsföreningens lotteri har man 1 000 lotter, varav det är vinst på 50 st. Din vän köper 3 lotter. Numrera dessa 1, 2 och 3. Beräkna sannolikheten att lott nr

   (a) 2 är en vinstlott. (1 p)

   (b) 3 är en vinstlott, givet att lotterna 1 och 2 båda är nitar. (2 p)

5. Beräkna väntevärde och median för en stokastisk variabel X som är Paretofördelad med täthet

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_T}\left(\frac{x_T}{x}\right)^{\alpha+1} \quad \text{för} \quad x > x_T \qquad (4\text{ p})$$

   Parametern $\alpha > 0$. För vilka α gäller dina resultat?

6. Antag att tiden tills en viss utrustning "går ner" (alltså slutar att fungera) är exponentialfördelad med väntevärde μ. Parametern $\lambda = 1/\mu$ brukar då kallas för intensiteten. I ett test av 7 sådana utrustningar uppmättes funktionstiderna

   76.6 4.3 3.8 1.7 30.1 4.2 22.5

   ML-skatta intensiteten λ. (3 p)

7. I syfte att påvisa att en ny typ av betong har bättre hållfasthetsegenskaper gjordes 10 provgjutningar av standardtypen och lika många med den nya typen, och man mätte böjhållfastheten. Därvid erhölls, i någon enhet, för standardblandningen, $\bar{x} = 13.1$, $s = 2.26$ och för för den nya typen, $\bar{x} = 15.6$, $s = 1.93$. Beräkna ett konfidensintervall för differensen av de två böjhållfastheterna. Konfidensgraden ska vara ca 99%. (4 p)

8. En del av en gammal industritomt är förorenad av kvicksilver. Hur stor del vet man inte. Inte heller vet man något om kvicksilvrets utbredning. Om man väljer en slumpmässig punkt på tomten på måfå (d.v.s. så att alla punkter har precis samma chans att bli valda) så är sannolikheten att ett jordprov taget i punkten är förorenat lika med θ, där θ betecknar den andel av tomten som är förorenad. Antag nu att man analyserar jordproven tagna i 8 på måfå och oberoende av varandra slumpvis valda punkter. Låt x vara antalet förorenade prover. (a) Vilken fördelning har x om θ är givet? Antag vidare att man på något sätt har bestämt sig för à priorifördelningen beta$(2.25, 3.75)$ för θ, samt att 6 av de 8 proven befanns vara förorenade. (b) Vilken à posteriorifördelning har θ? (2+2 p)

Lycka till!

Svar eller kortfattade lösningar till TMS055 Matematisk statistik V2 den 23/8-06

1. (a) $P(B) = P((B \cap A) \cup (B \setminus A)) = P(B \cap A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$
   (b) $P(A \cup B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$

   Additivitet för disjunkta händelser har används i den andra likheten i både (a) och (b).

2. Ja, ja, ja och nej.

3. Rimlig utgångspunkt för härledningen är att $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. Alla t-fördelningar är symmetriska, så om $P(t > t_c) = \alpha/2$ gäller även $1-\alpha = P\left(-t_c \leq \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_c\right) = P\left(\bar{x} - t_c s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_c s/\sqrt{n}\right)$. Således gäller att $\bar{x} - t_c s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_c s/\sqrt{n}$, vilket ofta skrives $\mu = \bar{x} \pm t_c s/\sqrt{n}$ är ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.

4. När det gäller att beräkna sannolikheter i den här typen av situationer måste man hålla reda på vad man vet. I (a) vet vi inget om någon lott, så sannolikheten att den andra ger vinst är $50/1000 = 1/20 = 0.05$. I (b) vet vi att lotterna 1 och 2 var nitar, så det finns 998 lotter kvar och 50 av dessa ger vinst. Den sökta sannolikheten är därför $50/998 = 25/499 \approx 0.0501$.

5. $$\mu = E[X] = \int_{x_T}^{\infty} x \,\frac{\alpha}{x_T}\left(\frac{x_T}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha\, x_T^{\alpha} \int_{x_T}^{\infty} x^{-\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{\alpha-1}\, x_T \quad \text{för} \quad \alpha > 1$$

   $$0.5 = P(X > m) = \int_{m}^{\infty} \frac{\alpha}{x_T}\left(\frac{x_T}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha\, x_T^{\alpha} \int_{m}^{\infty} x^{-\alpha-1}\, dx = \left(\frac{x_T}{m}\right)^{\alpha}$$

   $$\Rightarrow \quad 0.5^{1/\alpha} = \frac{x_T}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{x_T}{0.5^{1/\alpha}} = x_T\, 2^{1/\alpha}$$

6. ML-skattningen av λ är $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$. Så $\sum_i x_i = 76.6 + 4.3 + 3.8 + 1.7 + 30.1 + 4.2 + 22.5 = 143.2$ $\Rightarrow \hat{\lambda} = 7/143.2 = 0.0489$.

7. Rutan på sid 321–322 i D & F talar om att vi ska räkna ut antalet frihetsgrader ν enl

   $$\frac{\left(\frac{2.26^2}{10} + \frac{1.93^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2.26^2}{10}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{1.93^2}{10}\right)^2}{9}} = 15.56 \quad \Rightarrow \quad \nu = 15$$

   Konfidensintervallet ges utav

   $$\mu_2 - \mu_1 = 15.6 - 13.1 \pm 2.947\sqrt{\frac{2.26^2}{10} + \frac{1.93^2}{10}} = 2.5 \pm 2.77$$

   eftersom $t_{15,0.005} = 2.947$. Det är viktigt att inte glömma förutsättningarna för ovanstående. De är att observationerna i de två mätserierna bör vara oberoende och normalfördelade med väntevärden μ_1, μ_2 och standardavvikelser σ_1, σ_2. Om fördelningen ej är normal, så bör den ändå vara relativt symmetrisk, för då kan man luta sig mot centrala gränsvärdessatsen som säger att medelvärdena är approximativt normalfördelade.

8. (a) Givet sannolikheten θ, är $x \sim \text{bin}(8, \theta)$, eftersom de 8 provsvaren är oberoende och för alla gäller att sannolikheten att provet är förorenat är lika med θ. (b) Med Bayes formel kan man enkelt visa att om $\theta \sim \text{beta}(a, b)$ och $x|\theta \sim \text{bin}(n, \theta)$, så är $\theta|n, x \sim \text{beta}(a+x, b+n-x)$. Således gäller att θ:s à posteriorifördelning är $\text{beta}(8.25, 5.75)$.

Statistik:

U	3	4	5	S:a
4	5	1	0	10

TMS055 Matematisk statistik V2, 3 p, 29 maj 2006 fm V

Anvisningar

Tentamen består av en teoridel med 3 uppgifter och en problemdel med 5 uppgifter. Teoriuppgifterna ska besvaras först. Inga hjälpmendel är tillåtna på denna del. På problemdelen är räknedosa inkl manual, Beta och någon av de läroböcker i matematisk statistik som används på Chalmers tillåtna hjälpmedel. Tillåtna hjälpmedel är även de fyra häftena Introduktion till stokastisk simulering, Bayesiansk uppdatering av sannolikhetsskattningar, Poissonprocessen och extrema laster samt Något om riskkostnader samt föreläsningsanteckningarna som kan laddas ner ifrån kurshemsidan. Det är tillåtet med rimligt omfattande anteckningar i läroboken och i nedladdade häften. Inga andra anteckningar är tillåtna.

Kom ihåg att att alla svar skall motiveras såvida ej annat sägs. Ställ upp modell när det behövs och ange de för uträkningarna nödvändiga förutsättningarna. Skriv förståligt och använd etablerad notation.

Teoridelen skall lämnas in innan några hjälpmedel får tas fram.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev. bonuspoäng från inlämningsuppgifterna sänker gränser i motsvarande grad.

Examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.

Lösningar till uppgifterna publiceras på webben. Se kursens hemsida. Rättningsprotokoll anslås i MV:F, plan 2.

— Teoridel —

1. Besvara med ja eller nej följande fyra frågor:

   (a) Är det så att två händelser som utesluter varandra måste vara oberoende? (1 p)

   (b) Om $P(C) = 0.3$, $P(D'|C) = 0.2$ och $P(D|C') = 0.8$, är då C, D oberoende? (1 p)

   (c) Är felbenägenheten för en $\exp(\lambda)$-variabel $= \lambda t$? (1 p)

   (d) Om $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, är då $P(-2.5 \leq Z \leq 2.5) = 0.95$? (1 p)

   Svaren skall ej motiveras.

2. I en artikel om bilars livslängd (ant körda km innan skrotning) får du veta att 10:e percentilen för en viss modell är ca 213 000 km. Nittio procent av alla bilar körs alltså längre än 213 000 km. Om man antar att livslängden följer en Weibull-fördelning med formparameter $\alpha = 1.5$, vad kan man då säga om skalparametern β. Obs att Weibull-fördelningen parametriseras olika beroende på tillämpning och kynne (alltså statistikerns). Här vill jag att att beräkningarna görs m.a.p den parametrisering som har överlevnaden $R(x) = e^{-(x/\beta)^\alpha}$. (4 p)

3. I en applikation där man vill skatta sannolikheten θ för en händelse A bestämde man sig för att låta θ ha à priori-troligheten $\propto \theta^2$. Man gjorde 5 oberoende och likafördelade försök i vilka A inträffade 2 gånger. Beräkna (a) m.h.a Bayes formel θ:s à posteriori-trolighet, samt (b) (ML-) à posteriori-skattningen av θ. (2+2 p)

— Problemdel —

4. En s.k binär symmetrisk överföringskanal har felsannolikheten 0.03. (D.v.s en sänd etta uppfattas som nolla i 3% av fallen och en sänd nolla uppfattas som etta i 3% av fallen.) Antag att ettor sänds i 60% av fallen och nollor i 40%. Hur stor är sannolikheten att en mottagen etta är korrekt uppfattad? Ge svaret med 3 decimaler. (4 p)

5. Låt u vara ett slumptal och låt x vara heltalsdelen av $5u+1$. Beräkna median, väntevärde och varians för den stokastiska variabel X som x är en simulerad observation utav. (3 p)

6. Här är statistiken för april månad de 10 senaste åren för antalet olyckor i vilka minst en person omkommer i Västra Götaland: 15, 12, 18, 8, 20, 15, 11, 16, 17, 21. (Räknehjälp: $n = 10$, $\sum x = 153$, $\sum x^2 = 2489$.) Punkt- och intervallskatta med konfidensen ca 95% intensiteten olyckor i april månad i Västra Götaland. (3 p)

7. I en studie av höga vågor i Kattegatt fann man att vågamplituden översteg nivån $x_T =$ 3.7 m vid i medel ca 3.2 stormar per år. Efter anpassning av toppnivåerna till en Pareto-fördelning med täthet

$$f(x|T) = \frac{\alpha}{x_T}\left(\frac{x}{x_T}\right)^{-(\alpha+1)} \quad \text{för} \quad x > x_T$$

ML-skattade man α och erhöll $\hat{\alpha} = 5.25$. Skatta 10-årsnivån $\hat{x}_{10}$. (4 p)

8. I syfte att påvisa att en ny typ av betong har bättre hållfasthetsegenskaper gjordes 10 provgjutningar av standardtypen och lika många med den nya typen, och man mätte böjhållfastheten. Därvid erhölls, i någon enhet, för standardblandningen, $\bar{x} = 13.1$, $s =$ 2.26 och för för den nya typen, $\bar{x} = 17.3$, $s = 1.93$. Undersök om det går att på basis av dessa mätresultat, statistiskt säkerställa att den nya typen har högre böjhållfasthet.(4 p)

Lycka till!

Svar eller kortfattade lösningar till TMS055 Matematisk statistik V2 den 29/5-06

1. (a) Nej, ty om den ena inträffar, så kan den andra inte det.
   (b) Ja, ty $P(C|D) = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.8} = 0.3 = P(C)$
   (c) Nej, felbenägenheten för en $\exp(\lambda)$-fördelad tid är $= \lambda$
   (d) Nej. Det rätta är att $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 0.95$

2. Vi löser först x_p/β ur $R(x_p) = 1 - p$ och erhåller $x_p/\beta = (-\ln(1-p))^{-1/\alpha}$. Således gäller att

$$x_p = \beta(-\ln(1-p))^{-1/\alpha} \quad \text{eller} \quad \beta = x_p(-\ln(1-p))^{1/\alpha}$$

Jag glömde att ni inte har några räknedosor på denna delen av tentan, så det som följer finns det inget krav på: Insättning av $x_{0.1} \approx 213\,000$ och $\alpha = 1.5$ ger $\beta \approx 47\,515$. Enhet: km.

3. À priori-trolighet är $\pi(\theta) \propto \theta^2$. Modellen för $n = 5$ oberoende och likafördelade försök i vilka A inträffar $x = 2$ gånger är $\pi(x|n, \theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$. Således gäller att

$$\pi(x = 2|n = 5, \theta) = \binom{5}{2}\theta^2(1-\theta)^3$$

Bayes formel ger nu för à posteriori-troligheten $\pi(\theta|n = 5, x = 2) \propto \theta^4(1-\theta)^3$. Man känner igen detta som tätheten i Beta$(5, 4)$-fördelningen. Detta var deluppgift (a). I deluppgift (b) ska vi söka det θ som maximerar à posteriori-troligheten. Naturliga logaritmen (modulo ointressanta konstanter) av denna är $\mathcal{L}(\theta) = \ln\theta^4(1-\theta)^3 = 4\ln\theta + 3\ln(1-\theta)$. Standard metodik för maximering:

$$\frac{\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} = \frac{4}{\theta} - \frac{3}{1-\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{4}{7}$$

ML-skattningen à posteriori är således $\hat{\theta} = 4/7$.

4. Låt A betyda att en etta har sänts och B att en etta har tagits emot. Enl uppgift är $P(A) = 0.60$, $P(B|A) = 0.97$, $P(A^c) = 0.40$ och $P(B|A^c) = 0.03$. Bayes formel ger att

$$P(A|B) = \frac{0.6 \cdot 0.97}{0.6 \cdot 0.97 + 0.4 \cdot 0.03} = \frac{0.582}{0.582 + 0.012} = \frac{0.582}{0.594} \approx 0.980$$

5. X antar värdena $1, 2, 3, 4, 5$ med lika sannolikhet. Så $m = 3$, $\mu = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$ och $\sigma^2 = \frac{1}{5}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right) - 3^2 = 2$

6. Vi börjar med att beräkna $\bar{x} = \frac{153}{10} = 15.3$ och $s^2 = \frac{1}{9}\left(2489 - \frac{153^2}{10}\right) = 16.456 = 4.06^2$. Ur tabell får vi $t_c = 2.262$ (t-tabell, 2.5% risk och 9 frihetsgrader). Vi får nu att

$$\mu = 15.3 \pm 2.262 \cdot 4.06/\sqrt{10} = 15.3 \pm 2.9 \quad \text{eller} \quad 12.4 \leq \mu \leq 18.2$$

7. Vi får reda på att $\widehat{\lambda} = 3.2$ och att $\hat{\alpha} = 5.25$ i

$$f(x|T) = \frac{\alpha}{x_T}\left(\frac{x}{x_T}\right)^{-(\alpha+1)} \quad \text{för} \quad x > x_T$$

där $x_T = 3.7$. Medelst integration ser vi att

$$P(X > x|T) = \int_x^\infty f(y|T)\,dy = \cdots = \left(\frac{x_T}{x}\right)^\alpha \quad \text{för} \quad x > x_T$$

10-årsnivån x_{10} fås nu ur

$$\lambda P(X > x_{10}|T) = \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x_{10} = x_T(10\lambda)^{1/\alpha}$$

Vi får således skattningen $\hat{x}_{10} = 3.7(10 \cdot 3.2)^{1/5.25} = 7.16$ m av 10-årsnivån.

8. Vi har $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 13.1$, $s_1 = 2.26$ och $n_2 = 10$, $\bar{x}_2 = 17.3$, $s_2 = 1.93$ och ska testa $H_0; \mu_2 \leq \mu_1$ mot $H_a : \mu_2 > mu_1$. Teststatistikans värde är

$$t = \frac{17.3 - 13.1}{\sqrt{\frac{2.26^2}{10} + \frac{1.93^2}{10}}} = 4.469$$

Antalet frihetsgrader ν är heltalsdelen av

$$\frac{\left(\frac{2.26^2}{10} + \frac{1.93^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2.26^2}{10}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{1.93^2}{10}\right)^2}{9}} = 17.57$$

d.v.s $\nu = 17$. I t-tabell, 17 frihetsgrader, avläser vi $t_{0.95} = 1.740$ och $t_{0.99} = 2.567$. Av $t > t_{0.99}$ drar vi slutsatsen att H_0 kan förkastas på 1%-nivån. Det går alltså att statistiskt säkerställa att den nya typen har högre böjhållfasthet.

9 st teknologer gick upp, varav 2 st underkändes. Av de 7 som godkändes fick 6 st betyget 3 och en betyget 4.