Sannolikhetsteori

Grundläggande regel för hur sannolikheter adderas:

$$P(A) + P(B) = P(A \text{ eller } B) + P(A \text{ och } B)$$

Definition av betingad sannolikhet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ och } B)}{P(B)}$$

Definition: A och B säges vara *oberoende* då

$$P(A \text{ och } B) = P(A)P(B)$$

Observera att då gäller

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

Definition: Två händelser säges vara *ömsesidigt uteslutende* då de inte kan inträffa samtidigt. Då gäller självklart att

$$P(A \text{ och } B) = 0$$

Märkligt nog tror oerfarna ofta att två händelser som utesluter varandra också är oberoende, vilket är helt felaktigt. Två händelser som utesluter varandra är ju i högsta grad beroende.

Bayes formel:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\text{icke-}A)P(B|\text{icke-}A)}$$

Ofta skriver man

$$A \cap B \quad \text{istället för} \quad A \text{ och } B$$
$$A \cup B \quad \text{istället för} \quad A \text{ eller } B$$

och

$$A' \quad \text{eller} \quad A^c \quad \text{istället för} \quad \text{icke-}A$$

Stokastiska variabler eller Slumpmodeller

Normalfördelningens täthetsfunktion är

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Parametrar är $\mu \in R$, $\sigma > 0$. Utfallsrum är hela R.

Exempel: Antag att utfallet X av ett försök är normalfördelat med parametrar $\mu = 100$ och $\sigma = 15$. Då

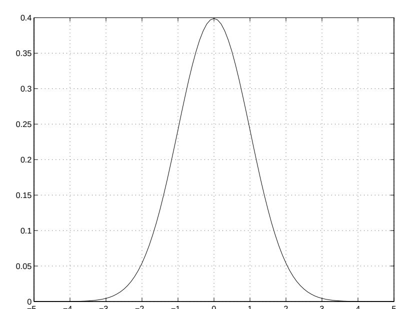
$$P(85 \leq X \leq 115) = \int_{85}^{115} f(x)\,dx = 0.6827$$
$$P(100 \leq X \leq 130) = \int_{100}^{130} f(x)\,dx = 0.4772$$

Om istället $\sigma = 5$,

$$P(85 \leq X \leq 115) = \int_{85}^{115} f(x)\,dx = 0.9973$$

Den standardiserade normalfördelningstätheten är

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad -\infty < z < \infty$$



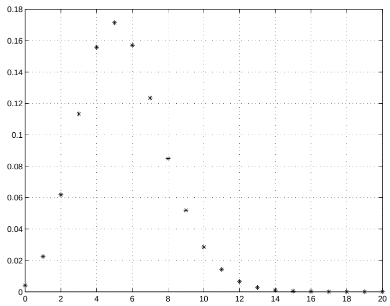
Poissonfördelningens massfunktion är

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Parameter är $\lambda > 0$. Utfallsrum är $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Exempel: $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ med $\lambda = 5.5$

$$\begin{aligned} P(X \in \{1, 2\}) &= e^{-5.5}\frac{5.5^1}{1!} + e^{-5.5}\frac{5.5^2}{2!} \\ &= 0.0225 + 0.0618 \\ &= 0.0843 \end{aligned}$$



Statistisk inferens

Verklighet: Vi har 9 mätningar av en parameter vi kallar μ

12.34 7.76 9.06 9.97 11.65 10.29 11.01 6.25 11.07

En lämplig modell skulle kunna vara att felet ϵ i en mätning är additivt och normalfördelat med parametrar μ_{B}, σ.

Några problem som vi ska lära oss hantera:

- skatta μ resp σ
- skatta felet i skattningen av μ
- ”bevisa” att $\mu_{\mathrm{B}} = 0$
- ”bevisa” att $\mu > 8$

Dessutom ska vi lära oss

- grundläggande om stokastisk simulering
- lite om Bayesiansk uppdatering av skattningar
- lite om statistisk extremvärdesteori
- lite om hur beslut baserade på riskberäkningar kan göras