Lösningar eller svar till hemövningar

1 Medianen m i Exp(λ)-fördelningen uppfyller ekvationen $\int_0^m \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 0.5$. Vänstra ledet är lika med $1 - e^{-\lambda m}$. Vi får därför att

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda m} = 0.5 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda m} = 0.5 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda m = \ln 0.5 \\ &\Leftrightarrow \quad m = \frac{\ln 2}{m} \end{aligned}$$

eftersom $\ln 0.5 = -\ln 2$.

2 X är diskret, tar värden ur $\Omega_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ och

$$p(x) = \frac{24}{x!\,(4-x)!}\, 0.9^x\, 0.1^{4-x} \quad \text{då} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Vi får

$$\begin{aligned} P(1 \le X \le 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{24}{1!\,3!}\, 0.9^1\, 0.1^3 + \frac{24}{2!\,2!}\, 0.9^2\, 0.1^2 + \frac{24}{3!\,1!}\, 0.9^3\, 0.1^1 \\ &= 0.0036 + 0.0486 + 0.2916 \\ &= 0.3438 \approx 0.344 \end{aligned}$$

3 Den 95:e percentilen $z_{0.95}$ i den standardiserade normalfördelningen uppfyller $0.95 = \Phi(z_{0.95})$. I en normalfördelningstabell (t.ex den i D&F) ser vi att $\Phi(1.64) = 0.9495$ och $\Phi(1.65) = 0.9595$. Linjärinterpolation ger att $\Phi(1.645) = 0.95$. Således gäller att $z_{0.95} = 1.645$.

4 Den 95:e percentilen $x_{0.95}$ uppfyller $P(X \le x_{0.95}) = 0.95$. Om $X \sim \mathrm{N}(100, 15)$, så är V.L $= P((X - \mu)/\sigma \le (x_{0.95} - 100)/15) = \Phi((x_{0.95} - 100)/15)$. Således gäller att

$$\frac{x_{0.95} - 100}{15} = z_{0.95} \quad \Rightarrow \quad x_{0.95} = 100 + 15 z_{0.95} \approx 124.7$$

5 Här är det underförstått att $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Den ställda frågan är alltså, för vilket z gäller $\Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95$? Tätheten $\varphi(z)$ är en jämn funktion. Härur följer att $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (tänk igenom detta). Således gäller att

$$2\Phi(z) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad 2\Phi(z) = 1.95 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) = 0.975 \quad \Rightarrow \quad z = 1.96$$

6 Vi ska beräkna sannolikheten för en observation > 0. Den är $p(1) + p(2) + p(3) + \ldots = 1 - p(0)$. Summan av alla sannolikheterna är ju 1. Den sökta sannolikheten är alltså

$$1 - p(0) = 1 - e^{-5.5}\frac{5.5^0}{0!} = 1 - e^{-5.5} \approx 0.00407$$