Lösningar eller svar till vissa hemövningar i moment 6

1 Vi ska se om det går att säkerställa att proportionen sympatisörer idag $p < 0.232$. Notera att $\hat{p} = \frac{262}{1313} = 0.200$. Vi bestämmer en kritisk proportion $c < 0.232$, svarande emot en maximal felrisk om ca 5% så här: Om $p \geq 0.232$, så följer att $P(\hat{p} \leq c) \leq 0.05$, om

$$
\begin{aligned}
& P\left(\frac{\hat{p}-0.232}{\sqrt{0.232(1-0.232)/1313}} \leq \frac{c-0.232}{\sqrt{0.232(1-0.232)/1313}}\right) = 0.05 \\
\Leftrightarrow\quad & \Phi\left(\frac{c-0.232}{\sqrt{0.232(1-0.232)/1313}}\right) = 0.05 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{c-0.232}{\sqrt{0.232(1-0.232)/1313}} = -1.645 \\
\Leftrightarrow\quad & c = 0.232 - 1.645\sqrt{0.232(1-0.232)/1313} = 0.232 - 0.019 = 0.213
\end{aligned}
$$

I den första ekvivalensen tänker jag mig att $\hat{p} \sim \mathrm{N}(p, \sqrt{p(1-p)/n})$, vilket ju är approximativt sannt. Nu följer av $\hat{p} = 0.200 < 0.213$ att vi har statistiskt säkerställt (på nivån 5%) att $p < 0.232$. (Tänk ordentlig igenom följande: Om det är fel att $p < 0.232$, så måste $p \geq 0.232$ och då gäller att $P(\hat{p} \leq c) \leq 0.05$. Risken att vi har fel är således högst 5%.)

2 Vad vi gjorde i ovanstående lösning var att testa $H_0 : p \geq 0.232$ mot $H_a : p < 0.232$. Obs att det är alltid mothypotesen H_a som man vill statistiskt säkerställa. Vi förkastade nollhypotesen $p \geq 0.232$ (till förmån för $p < 0.232$) på nivån 5%.

3 Vi ska testa $H_0 : \mu \leq 100$ mot $H_a : \mu > 100$. Man ska förkasta H_0 då $z = \frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{n}}$ är tillräckligt stor. Vi får

$$
z = \frac{104.2-100}{14.42/\sqrt{100}} = 2.91 \quad \text{och} \quad P(Z \geq 2.91) = 0.0018
$$

P-värdet är alltså 0.0018. Vi kan följaktligen förkasta H_0 på standardnivån 1%, men ej på 0.1%. Det är alltså statistiskt säkerställt på nivån 1% att medel-IQ i Sverige är > 100.

4 Vi noterar att denna gång är $n = 7$, $\bar{x} = 27.76$ och $s = 3.370$. Vi får

$$
t = \frac{27.76-25}{3.370/\sqrt{7}} = 2.167
$$

I t-tabell, $n-1 = 6$ frihetsgrader ser vi att P-värdet ligger mellan 2.5% och 5%. Vi kan alltså förkasta H_0 på nivån 5%, men ej på nivån 1%. Svaret på frågan är alltså att denna gång lyckades man statistiskt säkerställa att $\mu > 25$.

5 Från exemplet hämtar vi $n_1 = 5$, $\bar{x}_1 = 27.54$, $s_1 = 5.47$ och ifrån svaret till föregående övning hämtar vi $n_2 = 7$, $\bar{x}_2 = 27.76$, $x_2 = 3.37$. Observerat värde av teststatistikan är

$$
t = \frac{27.76-27.54}{\sqrt{\frac{5.47^2}{5}+\frac{3.37^2}{7}}} = .080
$$

Antalet frihetsgrader är heltalsdelen av

$$\frac{\left(\frac{5.47^2}{5}+\frac{3.37^2}{7}\right)^2}{\frac{\left(\frac{5.47^2}{5}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{3.37^2}{7}\right)^2}{6}} \approx 6.16$$

d.v.s 6 st. Vi ser i t-tabellen att P-värdet ej är lägre än 0.10 (90%-kvantilen är ju $1.440 > 0.080$). Det går således inte att förkasta $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ på någon rimlig nivå.