Stokastiska Processer HT 2006

Hemuppgift

Hemuppgiften är inte obligartorisk, men en fullgjord och inlämnad uppgift kommer att vara värd som ett problem på tentamen. Deadline är tentamensdagen, de som har lämnat in en korrekta lösningar före tentamen får tillräkna sig poängen, andra inte. (Senare inlämnade lösningar kan dock ge poäng på omtentan så klart.) Ni får jobba i grupp, men med max tre personer.

Läs föreläsningsanteckningar för Föreläsning 7 noga innan ni börjar lösa detta. Även Kapitel 5 i Patriks bok kan vara av intresse.

Till lösningar bör bifogas datorkoden som använts och de seed värden som har använts för slumptalsgeneratorn[1]. Ni får använda vilket "riktigt" språk som helst (till riktigt räknar jag förutom C, C++, Java, etc. även Matlab, Mathematica, och dylika, men **inte** t.ex. Excel macron), och koden bör vara kommenterad och dokumenterad (kvalitén på koden kan ha inverkan på huruvida resultatet får godkänt).

Under Föreläsning 7 så konstrueras slumpvandringsprocesser med mindre och mindre och steg, enligt:

$$W_\ell(t) = \sum_{k=1}^{t2^\ell} \frac{\xi_{\ell,k}}{\sqrt{2^\ell}}$$

där t kan anta värdet $0, 2^{-\ell}, 2\times 2^{-\ell}, 3\times 2^{-\ell}, \ldots$. Er uppgift blir att implementera processer av den här typen, och undersöka huruvida de beter sig som de borde.

Wienerprocessen i en Dimension

1. Implemetera en simulering av $W_\ell(t)$ genom att låta $\xi_{\ell,k}$ anta värdena 1 respektive -1 med sannolikhet $1/2$.

   Gör för $\ell = 5, 10, 15, 20$ tusen observationer av $W_\ell(1)$ och jämnför med den förväntade normalfördelningen. (Ni behöver inte göra en formell statistisk jämnförelse utan det räcker med att jämnföra några olika kvantiler eller att plotta frekvensfunktionerna.)

2. Träfftiden τ_x för en stokastisk process, defenieras som tiden då processen först når x eller $-x$. Det är en mycket viktig egenskap, men den kan ibland vara krånglig att räkna ut analytiskt, varför simulering passar.

   Fixera $\ell = 10$, och mät den genomsnittliga träfftiden för nivåerna $x = 10, 20, 30, 40, 50$. Plotta och se om ni ser någon tendens.

(Det kanske hjälper att vänta tills vi har diskuterat Stokastiska integraler, Föreläsning 9, innan man sätter igång med följande.)

Stokastiska Integraler

En *stokastisk integral* är Stieltjes integral över en stokastisk process

$$\int_{a,b} f(s)dX(s) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=a2^n}^{b2^n-1} f(2^{-n}k)(X(2^{-n}(k+1)) - X(2^{-n}k))$$

---

[1] Om ni inte vet vad detta betyder, så får ni fråga mig.

den stokastiska integralen integrerar funktionen f över processens bana mellan tiden a och b. Man kan dessutom låta $a \to -\infty$ och $b \to \infty$ för att få:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)dX(s)$$

Stokastiska integraler med avseende på Wienerprocessen är oerhört viktiga. Mycket av den moderna finansiella analysen bygger på sådanna, som tillåter prissättning och analys av t. ex. optioner och andra finansiella instrument. Vanligtvis integrerar man över en tvåsidig Wienerprocess, det vill säga:

$$W(t) = \begin{cases} W_1(t) & \text{om } t \geq 0 \\ -W_2(-t) & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

för två oberoende Wienerprocesser W_1 och W_2 (obs att minus tecknet före W_2 egentligen är onödigt eftersom Wienerprocessen är symmetrisk, dvs $W(t) \overset{D}{=} -W(t)$).

1. Använd (förhoppningsvis) koden från ovan för att approximera (ni får själv välja ℓ) den stokastiska integraler av följande funktioner med avseende på den tvåsidiga Wienerprocessen:

$$\begin{aligned} f(s) &= I_{[0,1]}(s) \\ f(s) &= 1 - 0.5s,\ 0 \leq s \leq 2,\ 0 \text{ annars.} \\ f(s) &= e^{-s},\ s \geq 0,\ 0 \text{ annars.} \end{aligned}$$

   Simulera varje integral många gånger, plotta fördelningen, och beräkna väntevärde och varians. (För den sista funktionen får ni skära av "svansen" vid något s för att integralen ska gå att beräkna.)

2. Simulera den stokastiska processen $X(t) = \int I_{[0,1]}(s+t)dW(t)$ där $W(t)$ är tvåsidigt Wienerprocess. Verkar den vara stationär?