Kapitel 10

Filter och Integraler

Integraler av Stokastiska Processer

Integralen av en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ över intervallet $[a, b]$ fås, som bekant, genom att dela upp intervallet i små delar, och ta summan av funktionens värde någonstans i varje delintervall gånger delintervallets längd. Det finns olika sätt att välja delintervallen, t. ex.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=a2^n}^{b2^n-1} f(2^{-n}k)2^{-n}.$$

En funktion är integrerbar om gränsvärdet existerar, men beroende på hur man väljer intervallen så kan olika funktioner vara integrerbara. Vi kommer inte att hänga upp oss på den typen av problem i den här kursen, utan att kommer att anta att de analystiska integraler som uppstår är väldefenierade.

Eftersom vi har ett gränsvärdes begrepp för stokastiska processer, kan vi defeniera integralen av en stokastisk process:

$$\int_a^b X(t)dt = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=a2^n}^{b2^n-1} X(2^{-n}k)2^{-n}.$$

Observera att integralen är en stokastisk variabel: Ett utfall ω i vårt stora sannolikhetsrum Ω ger ju en realisation av $X(t)$ (dvs, ett värde för processen i alla t), för vilken integralen antar ett värde i $\mathbb{R}$ (det var ett tag sedan vi tog upp ω och Ω, men det är viktigt att inte glömma att de alltid finns i bakgrunden).

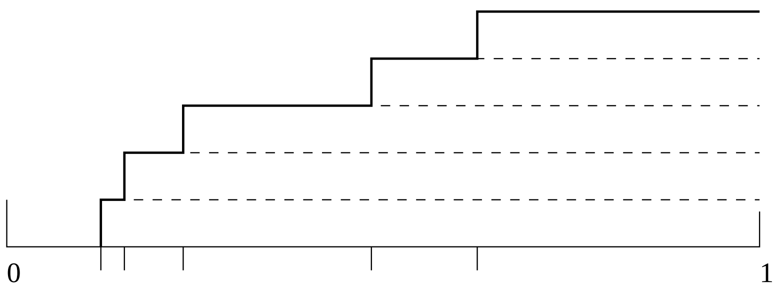
Tyvärr så är stokastiska processer mycket mer komplicerade än funktioner, och därför finns det inget bra sätt att beräkna primitiv "processer" eller något liknande för att kunna evaluera integralerna. Ett exempel:

Integrering av Poisson Processen

Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poisson process, och låt oss försöka "beräkna"

$$\int_0^1 X(t)dt.$$

Eftersom det inte finns någon allmän metod, så får man försöka vara smart, och tänka tillbaka till den gamla tolkningen av integralen som arean under funktionen. Från den här bilden



kan vi se att varje impuls γ_k som inträffar innan tiden 1, bidrar med $1 - \gamma_i$ till arean. Alltså blir

$$\int_0^1 X(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \max(0, 1 - \gamma_k).$$

Tyvärr hjälper detta inte oss så mycket, eftersom impulserna $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ har en komplicerad gemensam fördelning. Det finns dock något som kan hjälpa oss:

Lemma 1. *Låt $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ vara n oberoende s.v. som är likformigt fördelade på $[0, 1]$, och låt $\eta_{[k]}$ vara den k-te i storleksordning (så att $\eta_{[1]}$ är den minsta, $\eta_{[2]}$ den näst minsta, och $\eta_{[n]}$ den största).*

Betingat på $X(1) = n$ har $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ samma gemensamma fördelning som $(\eta_{[1]}, \eta_{[2]}, \ldots, \eta_{[n]})$.

Att bevisa lemmat är inte så svårt, se t.ex. Problem 1.4 i boken.

Nu kan vi betinga

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \max(0, 1 - \gamma_k) \leq x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \max(0, 1 - \gamma_k) \leq x \,|\, X(1) = n\right) \mathbf{P}(X(1) = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \max(0, 1 - \gamma_k) \leq x \,|\, X(1) = n\right) \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}
\end{aligned}$$

och sedan använda lemmat

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \max(0, 1 - \gamma_k) \leq x \,|\, X(1) = n\right) &= \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \max(0, 1 - \eta_{[k]}) \leq x\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k \leq x\right).
\end{aligned}$$

Det slutgiltiga högerledet, fördelningen av summan av n oberoende likformigt fördelade s.v., går att beräkna, men det blir inget vackert eller förenklande. Notera att det inte fanns något skäl att tro att fördelningen skulle bli någon vi har sett förut, den är till exempel en blandad fördelning, då

$$\mathbf{P}\left(\int_0^1 X(t)dt = 0\right) = e^{-\lambda}$$

men fördelningen är kontinuerlig för alla värden > 0.

Meningen med detta var att visa att att även för vår kanske enklaste stokastiska process så blir integralen någonting mycket komplicerat. Det är oftast inte värt mödan att explicit försöka beräkna integralernas fördelning, så i stället håller vi oss till att se på deras andra egenskaper.

Väntevärdet och Kovariansen av Summor och Integraler

För en tidsdiskret respektive tidskontinuerlig stokastiska process X och funktion $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ så existerar summan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k)$ respektive integralen $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)X(t)dt$ om och endast om

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(k)\, h(l)\, R_X(k,l)$$

respektive

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, g(s)\, R_X(s,t) ds dt$$

konvergerar (Sats 7.1 respektive 7.2). (Fundera gärna på vad detta betyder i specialfallet $g(t) = 1$.)

Sats 2.5 ger att för en tidsdiskret process

$$\mathbf{E}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\{g(k)X(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\mathbf{E}\{X(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)m_X(k)$$

och för en tidskontinuerlig

$$\mathbf{E}\{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)X(t)dt\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)m_X(t)dt$$

Om vi har att $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k)$ och $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Y(k)$ (respektive mostsvarande integraler) båda konvergerar för några funktioner $g, h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ och stokastiska processer X och Y så har vi även enligt sats 2.5, att

$$\mathbf{Cov}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k), \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Y(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(k)\, h(l)\, R_{X,Y}(k,l)$$

respektive:

$$\mathbf{Cov}\{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)X(t)dt, \int_{-\infty}^{\infty} h(s)Y(s)ds\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, h(s)\, R_{X,Y}(s,t) ds dt$$

där $R_{X,Y}(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\}$ är korskovariansfunktionen mellan X och Y (när $X = Y$ blir det så klart vår vanliga (auto-)kovariansfunktion).

Filter och impulssvar

Ett tidsdiskret (tidskontinuerligt) system $\mathcal{S}$ kallas för ett tidsdiskret (tidskontinuerligt) *filter* om det för varje par av konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ och insignaler X_1 och X_2, gäller att

$$\mathcal{S}(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 \mathcal{S}(X_1) + c_2 \mathcal{S}(X_2)$$

Ett filter är alltså helt enkelt ett *linjärt operation* på signaler (tex stokastiska processer).

Ett filter karakteriseras av dess impulssvar h.

Def 7.2 Ett filter med summerbart (integrerbart) impulssvar $h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ ($h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) och insignal $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ($\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$) har utsignal

$$\begin{cases} Y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)X(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)X(k-l) & \text{(diskret tid)} \\ Y(t) \ = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)\,ds \ = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)X(t-s)\,ds & \text{(kontinuerlig tid)} \end{cases}$$

Notera att för en svagt stationära process X så är utsignalen väldefinierad (existerar), enligt Corollarium 7.1/7.2 eftersom impulssvaret är summerbart/integrerbart.

Orsaken till att h kallas för impulssvar är just att det är filtrets utsignal (svar), då insignalen är en impuls:

Tag $X(k) = \delta(k) = 1$ för $k = 0$ och 0 för övriga. Vi får då enligt ovanstående definition

$$Y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)X(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)\delta(l) = h(k)$$

Om vi, för en svagt stationär process X och för ett filter med summerbart impulssvar, kombinerar Corollarium 7.1 med Sats 2.5 om hur man beräknar väntevärden och kovarianser för konvergerande summor, får vi följande sats:

Sats 7.3 Ett filter med summerbart impulssvar $h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ och en svagt stationärt process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ så är utsignalen Y svagt stationär med

$$m_Y = m_X \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)$$

$$r_Y(t, t+\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l)r_X(\tau + k - l)$$

Dessutom är X och Y stationärt korrelerade, dvs $r_{X,Y}(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), Y(t+\tau)\}$ beror ej på t, med

$$r_{X,Y}(t, t+\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)r_X(\tau - k)$$

Motsvarande gäller även för stokastiska processer i kontinuerlig, med integraler istället för summor.

Kausala Filter

Ett filter är *kausalt* om utsignalens värde i tiden t, $Y(t)$, inte beror på insignalens värde, $X(s)$, i tider $s \geq t$.

Detta är det samma som att säga impulssvaret $h(s) = 0$ för alla $s \leq 0$. (**Uppgift**: Visa detta.)

Moving Average Filter

(*Notera:* I boken finns en ganska komplicerade variant av "MA filtret" i Kapitel 8. Det Kapitlet ingår inte i kursen, så strunta i det.)

Om vi låter $g(s) = I_{[0,a)}(s)/a$ så får $Y(t)$ värde:

$$Y(k) = \frac{1}{a} \sum_{\ell=k-a+1}^{k} X(\ell)$$

respektive

$$Y(t) = \frac{1}{a} \int_{t-a}^{t} X(s)ds.$$

$Y(t)$ är alltså ett "flytande genomsnitt" av processens värde under de senaste a tidsenheterna. Denna typ av filter är viktiga och välanvända i elektronik och signal-system: genom att se på processens genomsnittliga värde under ett intervall, får man en utsignal som är mer tålig mot hopp och andra störningar.

(**Uppgift:** Räkna ut m_Y och $r_Y(t, t+\tau)$ för en svagt stationär insignal $X(t)$.)

Stokastiska Integraler

En utökningar av den vanliga analytiska integralen, den så kallade Stieltjes integralen, får vi om vi integrerar över en funktion $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, i stället för bara ett intervall

$$\int_{a,b} f(s)dg(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=a2^n}^{b2^n-1} f(2^{-n}k)(\alpha(2^{-n}(k+1)) - \alpha(2^{-n}k)).$$

Notera att detta betyder att vi multiplicerar värdet på f i varje litet intervall inte med intervallets längd som förut, utan med förändringen i g över intervallet.

En *stokastisk integral* är helt enkelt en Stieltjes integral över en stokastisk process

$$\int_{a,b} f(s)dX(s) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \; {}_{n\to\infty} \sum_{k=a2^n}^{b2^n-1} f(2^{-n}k)(X(2^{-n}(k+1)) - X(2^{-n}k))$$

den stokastiska integralen integrerar funktionen f över processens bana mellan tiden a och b. En stokastisk integral är alltså inte samma sak som de integraler av stokastiska processer vi haft ovan: det är viktigt att inte blanda ihop dem.

Man kan dessutom låta $a \to -\infty$ och $b \to \infty$ för att få:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)dX(s)$$

Vi har sätt stokastisk integraler förut i kursen, även om vi inte kallade dem för det då. *Hagelbrus* processer är nämligen i varje tid t en stokastiska integraler med avseende på en tvåsidigt Poissonprocess (det är inte svårt att se detta från formeln ovan) om man låter $f(s) = g(t+s)$ i defenitionen ovan.

Stokastiska funktioner med avseende på Wienerprocessen är oerhört viktiga. Mycket av den moderna finansiella analysen bygger på just sådanna processer, som tillåter prissättning och analys av t. ex. optioner och andra finansiella instrument.

Vanligtvis integrerar man över en tvåsidig Wienerprocess, det vill säga:

$$W(t) = \begin{cases} W_1(t) & \text{om } t \geq 0 \\ -W_2(-t) & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

för två oberoende Wienerprocesser W_1 och W_2 (obs. att minus tecknet före W_2 egentligen är onödigt eftersom Wienerprocessen är symmetrisk, dvs $W(t) \stackrel{D}{=} -W(t)$).

Nästa steg är så klart att ta en stokastisk integral av en stokastisk process. Men om ni vill veta mer om detta får ni vänta och läsa en kurs i Stokastisk Kalkyl.